Beweistheoretische Untersuchungen zur Mengenlehre

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
ULRICH FELGNER
aus Leoben

1968

9603

B E W E I S T H E O R E T I S C H E

U N T E R S U C H U N G E N

Z U R

M E N G E N L E H R E

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

U l r i c h F e l g n e r

aus Leoben

1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 4.Juli 1968

D e k a n : Professor Dr.H.Blume

1. Berichterstatter: Professor Dr.H.Salzmann

2. Berichterstatter: Professor Dr.W.Felscher

MEINEN ELTERN

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung..... 3

§ 1 : Der formale Aufbau des v.Neumann-Bernays-Gödelschen Axiomensystems..... 7

§ 2 : Syntaktische Modelle..... 16

§ 3 : Die Unabhängigkeit des Ausdrucks $\bigwedge_{\xi}[\mathfrak{M}(\xi) \Longleftrightarrow \bigvee_{\eta} \xi \in \eta]$ von den Axiomen der *NBG*-Mengenlehre..... 26

§ 4 : Die lokalen, globalen, universellen, Mengen- und Klassenformen von Ausdrücken der *NBG*-Mengenlehre..... 39

§ 5 : Bemerkungen zum Konfinalitätsprinzip..... 55

Literaturverzeichnis..... 80

Einleitung

Die vorliegende Arbeit enthält in ihrem Hauptteil erstens den Beweis, daß die Ausdrücke

$$\bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{M}(\xi) \Longleftrightarrow \bigvee_{\eta} \xi \in \eta \,\right]$$

und

$$\bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \Longleftrightarrow \bigwedge_{\eta}(\eta \in \xi \Longrightarrow \mathfrak{M}(\eta))\right]$$

von den Axiomen der von NEUMANN-BERNAYS-GÖDELschen Mengenlehre unabhängig sind und zweitens Untersuchungen über die Mengen- und Klassenform, die lokale, globale und universelle Form von Ausdrücken der von NEUMANN-BERNAYS-GÖDELschen Mengenlehre.

In § 1 geben wir eine Darstellung der von NEUMANN-BERNAYS-GÖDELschen Mengenlehre (kurz: *NBG*-Mengenlehre). Zunächst wird die „elementare" Sprache $\mathcal{L}$ der *NBG*-Mengenlehre aufgebaut und dann alle *NBG*-Axiome streng in dieser Sprache $\mathcal{L}$ formuliert (für die Ziele dieser Arbeit ist diese Strenge notwendig). $\mathcal{L}$ wird erweitert zu einer Sprache $\mathcal{L}'$, die neben den primitiven Prädikaten $\in$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}$ Zeichen für Prädikate und Terme, die in $\mathcal{L}$ ausdrückbar sind, enthält; In § 3 werden wir uns der Sprache $\mathcal{L}$ bedienen, während wir in den §§ 4 und 5 der leichteren Lesbarkeit halber die erweiterte Sprache $\mathcal{L}'$ verwenden.

In § 2 definieren wir den Begriff des (parametrischen oder parameterfreien) *syntaktischen Modells*. P. HÁJEK hat diesen Begriff in [14] für endlich axiomatisierte Theorien in Standardformalisierung erstmals definiert. Wir geben hier eine Definition für beliebige Theorien in Standardformalisierung und zeigen, daß für die axiomatisierbaren Theorien unsere Definition mit der Definition von P. HÁJEK übereinstimmt. Die Klasse aller syntaktischen Modelle bildet eine Kategorie.

In § 3 wird gezeigt, daß in der Darstellung der *NBG*-Mengenlehre von K. GÖDEL [13] das (primitive) Prädikat $\mathfrak{M}(\xi)$ (ξ *ist Menge*) nicht durch $\bigvee_{\eta} \xi \in \eta$ und das (primitive) Prädikat $\mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi)$ (ξ *ist Klasse*) nicht durch $\bigwedge_{\eta}[\eta \in \xi \Longrightarrow \mathfrak{M}(\eta)]$ definiert werden können. Dies beweisen wir durch Konstruktion syntaktischer Modelle und verwenden dabei, daß das Axiom der Konstruktibilität $V = L$ von den Axiomen der *NBG*-Mengenlehre unabhängig ist (COHEN 1963).

Schließlich zeigen wir noch, daß das Prädikat $\mathfrak{Pr}(\xi)$ (ξ *ist echte Klasse*; $\mathfrak{Pr}(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \wedge \neg\, \mathfrak{M}(\xi)$) nicht durch $\neg \bigvee_{\eta} \xi \in \eta$ definiert werden kann. Hier verwenden wir nicht die Methode der syntaktischen Modelle, sondern konstruieren eine Erweiterung des Axiomensystems der *NBG*-Mengenlehre durch Hinzunahme eines neuen primitiven Prädikates $\mathfrak{G}(\xi)$ (ξ *ist Gesamtheit*) und einiger Axiome, die gestatten, Klassen zu Gesamtheiten zusammenzufassen.

In § 4 definieren wir zunächst für Ausdrücke

der *NBG*-Mengenlehre die Begriffe: *Mengenform, Klassenform, lokale, globale* und *universelle Form.* Diese Begriffe werden in der Literatur zwar häufig benutzt, (vergl. A. Lévy [26] , H. und J. RUBIN [37] , e.a.), eine strenge Definition wurde aber noch nirgendwo gegeben. Wir schlagen in Def. (4.1) eine Definition vor, die dem bisherigen Gebrauch dieser Begriffe weitgehend entspricht.

Bezeichnet man mit $(M\text{-}\Phi,\Psi)$ die zum Paar Φ, Ψ gehörige Mengenform und mit $(Lok\text{-}\Phi,\Psi)$ die zu Φ, Ψ gehörige lokale Form, dann gelten die folgenden Sätze: „*Ist* $(M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi',\Psi')$ *ableitbar, so ist auch* $(Lok\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi',\Psi')$ *ableitbar*" und „*Ist* $(M\text{-}\Phi,\Psi)$ *eine Konsequenz des lokalen Auswahlaxioms, so ist auch* $(Lok\text{-}\Phi,\Psi)$ *eine Konsequenz des lokalen Auswahlaxioms*".

Nach EASTON [10] folgt in der *NBG*-Mengenlehre das universelle Auswahlaxiom nicht aus dem lokalen, während nach LÉVY [25] in der ACKERMANNschen Mengenlehre beide Formen des Auswahlaxioms einander äquivalent sind. Wir beweisen in § 4 einen Satz, wann in der ACKERMANNschen Mengenlehre lokale und universelle Formen einander äquivalent sind.

In § 5 wenden wir die in § 4 eingeführten Begriffe an und untersuchen die Mengenform, die lokale und die globale Form des Konfinalitätsprinzipes („*Jede Kette besitzt wohlgeordnete konfinale Teilmengen*"). Wir zeigen u.A. daß bei Abwesenheit des Fundierungsaxioms (Axiom (D) bei GÖDEL [13]) das lokale Auswahl-

axiom (AC) nicht aus der Mengenform des Konfinalitätsprinzipes (*M- Konf*) gefolgert werden kann, während bei Hinzunahme des Fundierungsaxioms (*M- Konf*) mit (AC) äquivalent ist. Wir zeigen ferner, daß jede einzelne der folgenden Aussagen:

1. *„Jede Gruppe besitzt maximale abelsche Untergruppen"*,
2. *„Kartesische Produkte gerichteter Mengen sind gerichtete Mengen"*, und
3. *„Jede teilgeordnete Menge besitzt maximale Antiketten"*

im System $\Sigma = \Sigma^0 + (D)$ mit dem lokalen Auswahlaxiom (AC) äquivalent ist.

Herrn Prof.Dr.W.Felscher (Freiburg) möchte ich für viele anregende Diskussionen danken. Meinen Dank möchte ich auch den Herren Prof.Dr.H.Hermes (Freiburg) und Prof.Dr.G.H.Müller (Heidelberg) aussprechen , durch deren Tagungen im Forschungsinstitut Oberwolfach diese Arbeit wesentlich gefördert wurde.

§ 1 : Der formale Aufbau des v.Neumann-Bernays-Gödelschen Axiomensystems

Die v.NEUMANN-BERNAYS-GÖDELsche Mengenlehre ist eine Theorie mit Standardformalisierung, also eine Theorie, die in der Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe formalisiert ist und insbesondere keine Prädikatenvariable enthält. Sie hat drei Grundbegriffe: zwei einstellige Prädikate $\mathfrak{M}$ (intendierte Interpretation: „*ist Menge*") und $\mathfrak{Cls}$ (intendierte Interpretation: „*ist Klasse*") und ein zweistelliges Prädikat $\in$ (intendierte Interpretation: „*ist Element von*"). Ihre logischen Zeichen sind die folgenden:

$$\neg \ , \ \wedge \ , \ \vee \ , \ \rightarrow \ , \ \leftrightarrow \ , \ \bigwedge \ , \ \bigvee \ , \ = \ ,$$

die der Reihe nach wie folgt zu lesen sind: „*nicht*" , „*und*", „*oder*", „*impliziert*", „*ist äquivalent mit*", „*für alle*", „*es gibt*" und „*ist gleich*". Sie hat schließlich nur eine Sorte quantifizierbarer Variablen, welche Subjektvariablen genannt werden. Wir können festsetzen, daß die Menge der Variablen abzählbar ist; durch ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ,... sei diese ein für alle Mal fest abgezählt. Als Namen für diese Subjektvariablen verwenden wir die

kleinen griechischen Buchstaben $\xi, \eta, \mu, \nu, \tau, \sigma, \ldots$

Die Sprache $\mathfrak{L}$ der v.NEUMANN-BERNAYS-GÖDELschen Mengenlehre (die im Folgenden mit *NBG*-Mengenlehre abgekürzt wird) wird wie folgt aufgebaut:

(i) Die *Primformeln* (oder *atomaren Ausdrücke*) sind:

$$\xi = \eta \quad , \quad \xi \in \eta \quad , \quad \mathfrak{M}(\xi) \quad , \quad \mathfrak{Cls}(\xi) \quad .$$

Ausgehend von diesen Primformeln bauen sich die weiteren Ausdrücke unter Verwendung der logischen Zeichen wie folgt auf:

(ii) Regel 1: *Die Primformeln sind Ausdrücke.*

Regel 2: *Wenn* Φ *und* Ψ *Ausdrücke sind, so sind auch* $\neg(\Phi)$, $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $\bigwedge_\xi (\Phi)$ *und* $\bigvee_\xi (\Phi)$ *Ausdrücke.*

Regel 3: *Nur die Zeichenreihen, die durch Anwendung der Regeln 1 und 2 in endlich vielen Schritten gewonnen werden können, heißen Ausdrücke.*

Die Gesamtheit aller dieser Ausdrücke bildet die Sprache $\mathfrak{L}$. Als Mitteilungszeichen für Ausdrücke verwenden wir die großen griechischen Buchstaben $\Phi, \Psi, \ldots\ldots$ Ausdrücke, in denen freie Variable vorkommen, werden *Prädikate* genannt; Ausdrücke, in denen keine freien Variablen vorkommen, werden *Aussagen* oder *Sätze* genannt.

Die Axiome der *NBG*-Mengenlehre sind diejenigen, die K.GÖDEL in [13] mitgeteilt hat. Dieses GÖDELsche Axiomensystem geht zurück auf ein System, das Johann v. NEUMANN in [30] und [31] veröffentlicht hatte. Unter

Verwendung einiger Ideen von R.M. ROBINSON [36] gab P. BERNAYS in [2] eine Modifikation des v.NEUMANNschen Systems. Das GÖDELsche System baut auf der Axiomatik von v.NEUMANN und BERNAYS auf.

In der Form, in der die Systeme von v.NEUMANN, BERNAYS und GÖDEL veröffentlicht worden sind, sind diese keine Theorien in Standardformalisierung im Sinne von TARSKI [41] (vergl. [41] ,S.32,Fußnote 22).Dieser Defekt kann jedoch durch einige kleine Änderungen behoben werden. Im System von K. GÖDEL [13] , in dem $x, y, z, \ldots$ Mengenvariable und $X, Y, Z, \ldots$ Klassenvariable sind, sind 1. alle Ausdrücke der Gestalt

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{array}{ll} \bigwedge_X \Phi(X) & \text{durch} \quad \bigwedge_\xi [\mathfrak{Kl}_S(\xi) \Rightarrow \Phi(\xi)] \\ \bigwedge_x \Phi(x) & \text{durch} \quad \bigwedge_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \Rightarrow \Phi(\xi)] \end{array}$$

und daher ebenso alle Ausdrücke der Gestalt

$$\begin{array}{ll} \bigvee_X \Phi(X) & \text{durch} \quad \bigvee_\xi [\mathfrak{Kl}_S(\xi) \wedge \Phi(\xi)] \\ \text{und} \quad \bigvee_x \Phi(x) & \text{durch} \quad \bigvee_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \wedge \Phi(\xi)] \end{array}$$

zu ersetzen (vergl. etwa SHEPERDSON [40] ,part I,S.162), 2. sind alle definierten Prädikate durch ihre definierenden Ausdrücke zu ersetzen und 3. alle eingeführten Terme $t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; ist t durch

$$\eta \in t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \iff \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$$

definiert, so ist $\eta \in t$ durch $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ zu ersetzen. Im GÖDELschen Axiomensystem treten nur die beiden Terme $\langle x,y \rangle$ und $\langle x,y,z \rangle$ auf (das *„geordnete Paar"* und das *„geordnete Tripel"*); hier ist $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathfrak{X}$ zu ersetzen durch:

(1.2) $\bigvee_\zeta [\, \zeta \in \varkappa \wedge \bigwedge_\varrho [\mathfrak{M}(\varrho) \Rightarrow (\varrho \in \zeta \iff$

$\iff [\bigwedge_\nu (\mathfrak{M}(\nu) \Rightarrow (\nu \in \varrho \iff \nu = \xi)) \vee \bigwedge_\nu (\mathfrak{M}(\nu) \Rightarrow (\nu \in \varrho \iff (\nu = \xi \vee \nu = \eta)))]]].$

Eine analoge Ersetzung gilt für $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle \in \varkappa$.

Ist diese Ersetzung ausgeführt, dann sind alle Axiome von GÖDEL [13] Ausdrücke der Sprache $\mathcal{L}$; in dieser Form ist der Prädikatenkalkül (der ersten Stufe) auf das Axiomensystem anwendbar, um alle Folgerungen algorithmisch gewinnen zu können.

Die Axiome werden in fünf Gruppen mitgeteilt. Das System wäre kaum lesbar, wenn wir es streng in der Sprache $\mathcal{L}$ formulieren würden. Um die Formelsprache zu entlasten, werden wir jedoch nur einen einzigen Term (nämlich das geordnete Paar, bzw. Tripel) einführen.

GRUPPE A :

(A 1) Jede Menge ist eine Klasse: $\bigwedge_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \Rightarrow \mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi)]$.

(A 2) Jede Klasse, welche Element einer Klasse ist, ist Menge:

$$\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \wedge \mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \xi \in \eta) \Rightarrow \mathfrak{M}(\xi)].$$

(A 3) Axiom der Bestimmtheit:

$$\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \wedge \mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \bigwedge_\zeta (\mathfrak{M}(\zeta) \Rightarrow (\zeta \in \xi \iff \zeta \in \eta))) \Rightarrow \xi = \eta].$$

(A 4) Axiom der Paarmenge:

$$\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{M}(\xi) \wedge \mathfrak{M}(\eta)) \Rightarrow \bigvee_\zeta (\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \bigwedge_\tau [\mathfrak{M}(\tau) \Rightarrow (\tau \in \zeta \Leftrightarrow (\tau = \xi \vee \tau = \eta))])].$$

Die Menge ζ in (A 4) ist nach Axiom (A 3) eindeutig bestimmt; wir können also den folgenden Term $\{\xi, \eta\}$ einführen:

$$\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \mathfrak{M}(\xi) \wedge \mathfrak{M}(\eta) \Rightarrow [\zeta \in \{\xi,\eta\} \Leftrightarrow (\zeta = \xi \vee \zeta = \eta)] .$$

Für $\xi = \eta$ setzen wir $\{\xi,\xi\} = \{\xi\}$. Damit können wir einen weiteren Term, das *geordnete Paar*, einführen, das nach KURATOWSKI wie folgt definiert wird:

$$\langle \xi,\eta \rangle = \{\{\xi\},\{\xi,\eta\}\}$$

Damit wird das geordnete Tripel durch $\langle \xi,\eta,\nu \rangle = \langle \xi,\langle \eta,\nu \rangle\rangle$ definiert. Wir werden also im Folgenden $\langle \xi,\eta \rangle \in \mathfrak{K}$ als Abkürzung für den Ausdruck (1.2) verwenden.

GRUPPE B :

(B 1) Existenz einer Klasse, die die $\in$ -Relation repräsentiert:

$$\bigvee_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \wedge \bigwedge_\eta \bigwedge_\zeta [(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \mathfrak{M}(\zeta)) \Rightarrow (\langle \eta,\zeta \rangle \in \xi \Leftrightarrow \eta \in \zeta)]] .$$

(B 2) Existenz einer Klasse, die den „Durchschnitt" repräsentiert:

$$\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \wedge \mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta)) \Rightarrow \bigvee_\zeta [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\zeta) \wedge \bigwedge_\nu [\mathfrak{M}(\nu) \Rightarrow (\nu \in \zeta \Leftrightarrow (\nu \in \xi \wedge \nu \in \eta))]]] .$$

(B 3) Existenz der „Komplementärklasse":

$$\bigwedge_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \Rightarrow \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \bigwedge_\zeta [\mathfrak{M}(\zeta) \Rightarrow (\zeta \in \eta \Leftrightarrow \zeta \notin \xi)])] .$$

(B 4) Existenz der „Urbildklasse":

$$\bigwedge_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \Rightarrow \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \bigwedge_\nu [\mathfrak{M}(\nu) \Rightarrow (\nu \in \eta \Leftrightarrow \bigvee_\zeta (\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \langle \zeta,\nu \rangle \in \xi))])] .$$

(B 5) Axiom des direkten oder Cartesischen Produktes:

$$\bigwedge_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \Rightarrow \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \bigwedge_\sigma \bigwedge_\tau [(\mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)) \Rightarrow (\langle \tau,\sigma \rangle \in \eta \Leftrightarrow \sigma \in \xi)])] .$$

(B 6) Existenz der „konversen Relation":

$$\bigwedge_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\xi) \Rightarrow \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{S}(\eta) \wedge \bigwedge_\sigma \bigwedge_\tau [(\mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)) \Rightarrow (\langle \sigma,\tau \rangle \in \eta \Leftrightarrow \langle \tau,\sigma \rangle \in \xi)])] .$$

(B 7) 1.Axiom der „Inversion":

$$\bigwedge_{\xi}\Big[\mathfrak{Cl}_2(\xi) \Rightarrow \bigvee_{\eta}\Big(\mathfrak{Cl}_2(\eta) \wedge \bigwedge_{\varrho}\bigwedge_{\sigma}\bigwedge_{\tau}\Big[\big(\mathfrak{M}(\varrho) \wedge \mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(\langle \varrho, \sigma, \tau\rangle \in \eta \iff \langle \sigma, \tau, \varrho\rangle \in \xi\big)\Big]\Big)\Big].$$

(B 8) 2.Axiom der „Inversion":

$$\bigwedge_{\xi}\Big[\mathfrak{Cl}_2(\xi) \Rightarrow \bigvee_{\eta}\Big(\mathfrak{Cl}_2(\eta) \wedge \bigwedge_{\varrho}\bigwedge_{\sigma}\bigwedge_{\tau}\Big[\big(\mathfrak{M}(\varrho) \wedge \mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(\langle \varrho, \sigma, \tau\rangle \in \eta \iff \langle \varrho, \tau, \sigma\rangle \in \xi\big)\Big]\Big)\Big].$$

GRUPPE C :

(C 1) Existenz einer „unendlichen" Menge:

$$\bigvee_{\zeta}\Big[\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \bigvee_{\nu}\big(\mathfrak{M}(\nu) \wedge \nu \in \zeta\big) \wedge \bigwedge_{\xi}\Big[\mathfrak{M}(\xi) \Rightarrow \big(\xi \in \zeta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\eta}\Big(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \big(\eta \in \zeta \wedge \eta \neq \xi\big) \wedge \bigwedge_{\tau}\Big[\mathfrak{M}(\tau) \Rightarrow (\tau \in \xi \Rightarrow \tau \in \eta)\Big]\Big)\Big]\Big].$$

(C 2) Axiom der „Vereinigungsmenge":

$$\bigwedge_{\xi}\Big[\mathfrak{M}(\xi) \Rightarrow \bigvee_{\eta}\Big(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \bigwedge_{\sigma}\bigwedge_{\tau}\Big[\big(\mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Rightarrow \big((\sigma \in \tau \wedge \tau \in \xi) \Rightarrow \sigma \in \eta\big)\Big]\Big)\Big].$$

(C 3) Axiom der „Potenzmenge":

$$\bigwedge_{\xi}\Big[\mathfrak{M}(\xi) \Rightarrow \bigvee_{\eta}\Big(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \bigwedge_{\zeta}\Big[\mathfrak{M}(\zeta) \Rightarrow \Big[\bigwedge_{\tau}\big(\mathfrak{M}(\tau) \Rightarrow (\tau \in \zeta \Rightarrow \tau \in \xi)\big) \Rightarrow \zeta \in \eta\Big]\Big]\Big)\Big].$$

(C 4) Ersetzungsaxiom:

$$\bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\Big[\big(\mathfrak{M}(\xi) \wedge \mathfrak{Cl}_2(\eta)\big) \Rightarrow \Big[\bigwedge_{\varrho}\bigwedge_{\sigma}\bigwedge_{\tau}\Big(\big(\mathfrak{M}(\varrho) \wedge \mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(\big(\langle \sigma, \varrho\rangle \in \eta \wedge \langle \tau, \varrho\rangle \in \eta\big) \Rightarrow \sigma = \tau\big)\Big) \Rightarrow \bigvee_{\nu}\Big[\mathfrak{M}(\nu) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\zeta}\big(\mathfrak{M}(\zeta) \Rightarrow (\zeta \in \nu \iff \bigvee_{\lambda}\big[\mathfrak{M}(\lambda) \wedge \lambda \in \xi \wedge \langle \zeta, \lambda\rangle \in \eta\big]\big)\big)\Big]\Big].$$

GRUPPE D :

(D) Fundierungsaxiom:

$$\bigwedge_{\xi}\Big[\big(\mathfrak{Cl}_2(\xi) \wedge \bigvee_{\eta}\big(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \eta \in \xi\big)\big) \Rightarrow \bigvee_{\zeta}\big(\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \zeta \in \xi \wedge \bigwedge_{\nu}\big[\mathfrak{M}(\nu) \Rightarrow \neg(\nu \in \zeta \wedge \nu \in \xi)\big]\big)\Big].$$

GRUPPE E :

(E) Universelles Auswahlaxiom:

$$\bigvee_{\xi}\Big[\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \wedge \bigwedge_{\varrho}\bigwedge_{\sigma}\bigwedge_{\tau}\Big[\big(\mathfrak{M}(\varrho) \wedge \mathfrak{M}(\sigma) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\big((\langle\sigma,\varrho\rangle\in\xi \wedge \langle\tau,\varrho\rangle\in\xi) \Longrightarrow \sigma=\tau\big)\Big] \wedge$$

$$\wedge\bigwedge_{\eta}\Big[\mathfrak{M}(\eta) \Rightarrow \big(\bigvee_{\zeta}(\mathfrak{M}(\zeta)\wedge\zeta\in\eta) \Rightarrow \bigvee_{\varkappa}(\mathfrak{M}(\varkappa)\wedge\varkappa\in\eta \wedge\langle\varkappa,\eta\rangle\in\xi)\big)\Big]\Big].$$

Das System der Axiome von Gruppe A wird kurz mit (A) bezeichnet, d.h. (A) $=$ {(A1),(A2),(A3),(A4)}. Analog: (B) $=$ {(B1),(B2),(B3),(B4),(B5),(B6),(B7),(B8)} und (C) $=$ {(C1),(C2),(C3),(C4)}. Das System der Axiome der Gruppen A, B und C wird mit Σ° bezeichnet, also:

$$\Sigma^{\circ} = (A) \cup (B) \cup (C) .$$

Das System der Axiom der Gruppen A, B, C und D wird Σ genannt:

$$\Sigma = (A) \cup (B) \cup (C) \cup (D) .$$

Das System der Axiome der Gruppen A, B, C, D, E schließlich wird Σ^{*} genannt:

$$\Sigma^{*} = (A) \cup (B) \cup (C) \cup (D) \cup (E).$$

Für den syntaktischen Ableitbarkeitsbegriff verwenden wir das Zeichen $\vdash$. Ist Φ ein Ausdruck der Sprache $\mathfrak{L}$, so heißt $\Sigma^{\circ} \vdash \Phi$ beispielsweise, daß Φ mittels der Regeln des Prädikatenkalküls (der 1. Stufe) in endlich vielen Schritten von den Ausdrücken aus Σ° ausgehend gewonnen werden kann.

Es ist zweckmäßig, die elementare Sprache $\mathfrak{L}$ um eine Reihe von Termen und Prädikaten zu erweitern und zwar so, daß in der erweiterten Sprache $\mathfrak{L}'$ nur

solche Terme und Prädikate vorkommen, die in $\mathfrak{L}$ eine Definition haben. Das bedeutet, daß $\mathfrak{L}'$ im Vergleich mit $\mathfrak{L}$ keine neuen Ausdrucksmöglichkeiten hat; die neueingeführten Terme und Prädikate dienen lediglich einer einfacheren Schreibweise. Ändert man die Definition der Primformeln auf S.8 so ab, daß rechts und links von „ = " und „ $\in$ " , sowie hinter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Cls}$ beliebige Terme stehen dürfen und wendet man auf diese Primformeln den Ausdruckskalkül an (vergl. S.8), so erhält man die Ausdrücke der Sprache $\mathfrak{L}'$, wenn zusätzlich in den so gewonnenen Ausdrücken Prädikate durch neue Prädikatensymbole ersetzt werden dürfen.

Wie üblich (vergl. GÖDEL [13] , QUINE [34] e.a.) führen wir die folgenden Terme ein: $\emptyset$ (leere Menge), $\mathfrak{V}$ (Klasse aller Mengen), $\mathfrak{E}$ (Klasse, die die $\in$ - Relation repräsentiert), die Ordinalzahlen ω , ω_1 ,.. die Kardinalzahlen $\aleph_0$, $\aleph_1$,... und schließlich noch $\cap$, $\bigcap$ (Durchschnitt), $\cup$, $\bigcup$ (Union), $\setminus$ (Mengendifferenz), $\times$ (Cartesisches Produkt), $\mathfrak{P}$ (Potenzmenge) , wobei $\mathfrak{P}$, $\bigcap$, $\bigcup$ Terme einer Variablen und $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\times$ Terme zweier Variabler sind. Wir führen noch die folgenden Prädikatensymbole ein (vergl. GÖDEL [13]):

$$\mathfrak{Un}(\xi) \rightleftharpoons \Big(\mathfrak{Cls}(\xi) \wedge \bigwedge_{\eta}\bigwedge_{\zeta}\bigwedge_{\tau}\Big[\big(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \mathfrak{M}(\zeta) \wedge \mathfrak{M}(\tau)\big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \big((\langle\eta,\tau\rangle \in \xi \wedge \langle\zeta,\tau\rangle \in \xi) \Rightarrow \eta = \zeta\big)\Big]\Big)$$

(ξ ist eine eindeutige (univalued) Abbildung),

$\mathfrak{Rel}(\xi) \rightleftharpoons \big(\mathfrak{Cls}(\xi) \wedge \xi \subseteq \mathfrak{V}\times\mathfrak{V}\big)$ (ξ ist Relation)

$\mathfrak{Fnc}(\xi) \rightleftharpoons \big(\mathfrak{Cls}(\xi) \wedge \mathfrak{Rel}(\xi) \wedge \mathfrak{Un}(\xi)\big)$ (ξ ist Funktion).

Zur Bereicherung der formalen Sprache werden ferner drei Sorten von Variablen eingeführt: die Mengenvariable x_1, x_2, x_3, ... und Klassenvariable X_1, X_2, X_3, ... werden gemäß (1.1) eingeführt (als Namen für Mengenvariable bzw. Klassenvariable verwenden wir die Zeichen x, y, z, ...bzw. X, Y, Z, ...) und die Ordinalzahlvariable α_1, α_2, α_3, ... (α, β, γ, δ, ... sind Namen für Ordinalzahlvariable) durch:

(1.3) $\bigwedge_{\alpha} \Phi(\alpha)$ steht für $\bigwedge_{\xi}(\mathfrak{O}(\xi) \Longrightarrow \Phi(\xi))$.

Dabei bedeutet $\mathfrak{O}(\xi)$: ξ ist Ordinalzahl - vergl. Def. 6.61 in GÖDEL [13], S.23.

Es sei hervorgehoben, daß $\mathcal{L}$ eine festumrissene Sprache ist, während $\mathcal{L}'$ unbestimmt gelassen wird, da sie lediglich (der leichteren Lesbarkeit der Formeln wegen) als Hilfssprache verwendet wird. Prädikate und Terme dürfen in $\mathcal{L}'$ jedoch nur vorkommen, wenn sie in $\mathcal{L}$ eine Definition haben.

§ 2 : Syntaktische Modelle

Ein semantisches Modell einer Theorie $\mathcal{T}$ wird durch eine meta-mathematische Menge J (dem sogenannten Individuenbereich) gegeben, in der Relationen definiert sind derart, daß alle „wahren" Aussagen von $\mathcal{T}$ in J „gültig" sind. Im Unterschied dazu werden syntaktische Modelle einer Theorie $\mathcal{T}_1$ durch eine Transformation in eine andere Theorie $\mathcal{T}_2$ gegeben. Die „Gültigkeit" der „wahren Aussagen von $\mathcal{T}_1$ " im syntaktischen Modell wird hier natürlich nicht semantisch definiert, sondern wie folgt: die transformierten *„wahren Aussagen von* $\mathcal{T}_1$ " müssen *„wahre Aussagen von* $\mathcal{T}_2$ " sein. Im Falle axiomatisierter Theorien heißt das: die transformierten Axiome von $\mathcal{T}_1$ müssen aus den Axiomen von $\mathcal{T}_2$ syntaktisch ableitbar sein.

Eine formalisierte Theorie ist ein geordnetes Tripel $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{L}, \mathcal{C}, \mathcal{W} \rangle$ [1], wo $\mathfrak{L}$ eine formalisierte Sprache, $\mathcal{C}$ eine Menge von Konsequenz-Operationen und $\mathcal{W}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{L}$ ist, die bezüglich der Operationen aus $\mathcal{C}$ abgeschlossen ist; $\mathcal{W}$ wird dabei *„Menge der wahren Formeln von* $\mathcal{T}$ " genannt (vergl.

---

[1] $=$ ist (in der von P.HÁJEK [14] ,S.273, herrührenden Schreibweise) die meta-mathematische (aktuale) Gleichheitsrelation.

RASIOWA-SIKORSKI [35] ,S.186). $\mathcal{T}$ heißt *axiomatisierbar*, wenn eine rekursiv-aufzählbare Teilmenge $\mathcal{A}$ von Aussagen von $\mathcal{W}$ existiert, so daß der Abschluß von $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{C}$ gleich $\mathcal{W}$ ist.

Bei *Theorien in Standardformalisierung* (sogenannten *elementaren Theorien*) ist $\mathcal{C}$ der Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Einschluß des Gleichheitskalküls $\mathcal{T}$ und $\mathfrak{L}$ läßt sich als abstrakte Algebra erklären, deren Elemente Formeln (wohlgebaute Zeichenreihen) sind. Es ist bekanntlich keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß in elementaren Theorien die Formeln aus $\mathfrak{L}$ neben Symbolen für primitive Prädikate, einer Sorte quantifizierbarer Variablen, den logischen Zeichen (einschließlich des Gleichheitszeichens „ = ") und Klammern keine weiteren Symbole enthalten (wie z.B. Symbole für Konstanten und Funktionen). Ferner setzen wir voraus, daß $\mathfrak{L}$ nur soviele Zeichen für primitive Prädikate enthält, wie in Ausdrücken aus $\mathcal{W}$ vorkommen.

P.HÁJEK hat in [14] (siehe auch HÁJEK [15] und [16]) kürzlich den klassischen Begriff der Interpretation einer Theorie $\mathcal{T}_1$ in einer zweiten Theorie $\mathcal{T}_2$, der auf TARSKI zurückgeht (vergl. A.TARSKI [41] und HAO WANG [45]), dadurch verallgemeinert, daß auch Parameter zugelassen werden. Diesen verallgemeinerten Interpretationsbegriff (von HÁJEK *syntaktisches Modell* genannt) sprach HÁJEK in [14] nur für endlich axiomatisierte elementare Theorien aus. Wir werden ihn im Folgenden für beliebige elementare Theorien definieren.

(2.1) Definition: Seien $\mathcal{T}_1 = \langle \mathfrak{L}_1, \mathcal{P}, \mathcal{W}_1 \rangle$ und $\mathcal{T}_2 = \langle \mathfrak{L}_2, \mathcal{P}, \mathcal{W}_2 \rangle$ elementare Theorien und $\mathbf{P}$ die Menge der primitiven Prädikate von $\mathcal{T}_1$ und $\mathbf{Q}$ die von $\mathcal{T}_2$. Die Formeln:

$\hat{\theta}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$,

$\hat{\Phi}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1})$,

$\hat{\Psi}_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+n_i})$ $\quad (i \in I)$

- dabei ist I die Indexmenge der Menge $\mathbf{P}$ der primitiven Prädikate $\Pi_i^{n_i}$ von $\mathcal{T}_1$ und n_i die Stellenzahl von $\Pi_i^{n_i}$ $(n_i \in \omega)$: $\mathbf{P} = \{\Pi_i^{n_i};\ i \in I\}$ — heißen eine *Translation* (*Übersetzung* oder *Transformation*) von $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$, wenn für alle $i \in I$ für jede in $\hat{\Psi}_i$ vorkommende gebundene Variable η_j gilt: $j \equiv 1 \bmod 2$ und:

(+) $\left[\forall_{\eta_1} \cdots \forall_{\eta_k} \hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k)\right] \in \mathcal{W}_2$

(++) $\left[\bigwedge_{\eta_1} \cdots \bigwedge_{\eta_k} \left(\hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \Rightarrow \forall_{\eta_{k+1}} \hat{\Phi}(\eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1})\right)\right] \in \mathcal{W}_2$

Da $\hat{\theta}$ die Parameter charakterisiert, nennen wir $\hat{\theta}$ die *Parameterbedingung*; $\hat{\Phi}$ gibt (in Abhängigkeit von den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_k$) die Objekte des Modells an und wird daher *Modellbedingung* genannt. Die $\hat{\Psi}_i$ sind die Bilder der primitiven Prädikate $\Pi_i^{n_i}$ von $\mathcal{T}_1$. Die Formeln $\hat{\theta}$, $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}_i$ $(i \in I)$ sind Ausdrücke mit genau k, $k+1$, bzw. $k+n_i$ freien Variablen aus $\mathfrak{L}_2$. Die Bedingung, daß die Indices der gebundenen Variablen in den $\hat{\Psi}_i$ ungerade Zahlen sein müssen, wurde eingeführt, um an späteren Stellen gebundene Umbenennungen nicht nötig zu haben.

Für die folgenden Zwecke sei der *Ersetzungsoperator* *rep* (=replace) eingeführt: dazu sei $\mathcal{T} = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{ \hat{\Psi}_i ; i \in I \} \rangle$ eine Translation von $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ und h eine eineindeutige Abbildung der Menge $Var_1 = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \}$ der Subjektvariablen von $\mathcal{C}_1$ in die Menge

$$\{ \eta_j ; j \geq k+1 \text{ und } j \equiv 0 \bmod 2 \}$$

von Subjektvariablen von $\mathcal{C}_2$, ausgenommen der Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_k$ für die Parameter in $\hat{\theta}$ und der Variablen η_j mit $j \equiv 1 \bmod 2$. In dieser Form wird der Ersetzungsoperator *rep* von $\mathcal{T}$ und von h abhängen. Damit der Operator *rep* nur von $\mathcal{T}$ abhängt setzen wir fest (dies ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich), daß h die Abbildung $\xi_i \longmapsto \eta_{2(i+k)}$ ist. (k ist durch $\hat{\theta}$ und damit durch $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt).

Für Ausdrücke Φ aus $\mathfrak{L}_1$ wird $rep_{\mathcal{T}}(\Phi)$ induktiv über den Aufbau von Φ definiert; $rep_{\mathcal{T}}(\Phi)$ wird eine Formel aus $\mathfrak{L}_2$ sein.

Die in (2.1) gegebene Bedingung, daß für die gebundenen Variablen η_j aus $\hat{\Psi}_i : j \equiv 1 \bmod 2$ gelten soll, wird nun verständlich: sie wurde eingeführt, um bei der Ersetzung der $\Pi_i^{n_i}$ durch die $\hat{\Psi}_i$ in Ausdrücken Φ aus $\mathfrak{L}_1$ Variablenkonfusion zu vermeiden. Die Bedingung bewirkt also, daß in (2.2) (i) das Bild $h(\xi_{j_\nu}) = \eta_{2(k+j_\nu)}$ einer in der Primformel $\Pi_i^{n_i}(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_i}})$ freien Variablen ξ_{j_ν} auch in

$$\hat{\Psi}_i(\eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{2(k+j_1)}, \ldots, \eta_{2(k+j_{n_i})})$$

eine freie Variable ist, also nicht in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät. Die Bedingung $j \equiv 1 \bmod 2$ ist bekanntlich keine wesentliche Einschränkung, da sie durch eine gebundene Umbenennung stets erfüllt werden kann.

(2.2) Definition:

(i) Ist Φ eine Primformel der Gestalt $\xi_{j_1} = \xi_{j_2}$, so ist $rep_{\mathfrak{T}}(\Phi) = (\eta_{2(k+j_1)} = \eta_{2(k+j_2)})$.

(ii) Ist Φ eine Primformel der Gestalt $\pi_i^{n_i}(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_i}})$, so ist:
$rep_{\mathfrak{T}}(\Phi) = \hat{\Psi}_i(\eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{2(k+j_1)}, \ldots, \eta_{2(k+j_{n_i})})$.

(iii) Falls $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$, so ist:
$rep_{\mathfrak{T}}(\Phi_1 \wedge \Phi_2) = rep_{\mathfrak{T}}(\Phi_1) \wedge rep_{\mathfrak{T}}(\Phi_2)$,

(iv) Falls $\Phi = \neg \Phi_1$, so ist:
$rep_{\mathfrak{T}}(\Phi) = rep_{\mathfrak{T}}(\neg \Phi_1) = \neg\, rep_{\mathfrak{T}}(\Phi_1)$,

(v) Falls $\Phi = \bigwedge_{\xi_j} \Phi_1$, so ist:
$rep_{\mathfrak{T}}(\Phi) = rep_{\mathfrak{T}}(\bigwedge_{\xi_j} \Phi_1) =$
$\bigwedge_{\eta_{2(k+j)}} \left[\hat{\Phi}(\eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{2(k+j)}) \Rightarrow rep_{\mathfrak{T}}(\Phi_1) \right]$.

Damit ist $rep_{\mathfrak{T}}(\Phi)$ für alle Φ aus $\mathfrak{L}_1$ definiert, denn $\Phi_1 \vee \Phi_2$ ist als $\neg((\neg \Phi_1) \wedge (\neg \Phi_2))$ definiert, $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ als $(\neg \Phi_1) \vee \Phi_2$ und $\bigvee_{\xi_j} \Phi_1$ als $\neg \bigwedge_{\xi_j} (\neg \Phi_1)$.

Die Wirkung des Ersetzungsoperators rep auf Ausdrücke Φ aus $\mathfrak{L}$ kann kurz wie folgt beschrieben werden: in Φ wird jedes primitive Prädikat $\pi_i^{n_i}$ durch $\hat{\Psi}_i$ ersetzt und alle Quantoren werden auf $\hat{\Phi}$ relativiert.

Wir bemerken noch, daß durch den Ersetzungsoperator *rep* Aussagen aus $\mathfrak{L}_1$ dann und nur dann in Aussagen (aus $\mathfrak{L}_2$) übergehen, wenn $\hat{\theta}$ eine Aussage ist, die Translation $\mathbb{T} = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ also parameterfrei ist.

(2.3) Definition: Eine Translation $\mathbb{T} = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ von $\mathcal{C}_1 = \langle \mathfrak{L}_1, \mathcal{R}, \mathcal{W}_1\rangle$ in $\mathcal{C}_2 = \langle \mathfrak{L}_2, \mathcal{R}, \mathcal{W}_2\rangle$ heißt *syntaktisches Modell von* $\mathcal{C}_1$ *in* $\mathcal{C}_2$, wenn für alle Φ aus $\mathcal{W}_1$ gilt:

(x) $$\left[\bigwedge_{\eta_1}\cdots\bigwedge_{\eta_k}\left[\hat{\theta}(\eta_1,\ldots,\eta_k) \Longrightarrow rep_{\mathbb{T}}(\Phi)\right]\right] \in \mathcal{W}_2$$

(2.4) Definition: Sei $\mathbb{T} = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ ein syntaktisches Modell von $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$. Ist $\hat{\theta}$ eine Aussage (also $k = 0$), so heißt $\mathbb{T}$ *parameterfrei*; enthält aber $\hat{\theta}$ freie Variable, so heißt $\mathbb{T}$ *parametrisches syntaktisches Modell.*

Der in (2.3) definierte Begriff des syntaktischen-Modells ist eine Verallgemeinerung des klassischen *Interpretationsbegriffes*, denn ist $\mathcal{J} = \langle \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ eine Interpretation von $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ und Γ irgendeine Aussage aus $\mathcal{W}_2$ (oder ein Axiom, falls $\mathcal{C}_2$ axiomatisierbar ist), so ist $\langle \Gamma, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ ein (parameterfreies) syntaktisches Modell von $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$.

Ist $\mathcal{C}_2$ eine axiomatisierbare Theorie mit der Axiomenmenge $\mathcal{A}_2$, so kannman in Def.(2.1) die beiden Bedingungen (+) und (++) auch durch die gleichwertige Bedingung:

(2.5) $\mathcal{A}_2 \vdash \bigvee_{\eta_1}\cdots\bigvee_{\eta_k}\hat{\theta}(\eta_1,\ldots,\eta_k) \wedge \bigwedge_{\eta_1}\cdots\bigwedge_{\eta_k}\left[\hat{\theta}(\eta_1,\ldots,\eta_k) \Rightarrow \bigvee_{\eta_{k+1}}\hat{\Phi}(\eta_1,\ldots,\eta_{k+1})\right]$

ersetzen. Ist auch $\mathcal{T}_1$ axiomatisierbar und $\mathcal{A}_1$ eine Menge von Axiomen für $\mathcal{T}_1$, so kann man die Bedingung (×) von Def. (2.3) auch durch die gleichwertige Bedingung:

(2.6) $\mathcal{A}_2 \vdash \bigwedge_{\eta_1}\cdots\bigwedge_{\eta_k}\left[\hat{\theta}(\eta_1,\ldots,\eta_k) \Longrightarrow rep_{\mathbb{T}}(\Phi)\right]$

für alle Axiome Φ von $\mathcal{T}_1$,

ersetzen. Die Gleichwertigkeit von (2.3) und (2.6) folgt dabei sofort aus dem folgenden Lemma:

(2.7) Lemma: *Sei* $\mathbb{T} = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_i ; i \in I\}\rangle$ *ein syntaktisches Modell der axiomatisierten Theorie* $\mathcal{T}_1 = \langle \mathfrak{L}_1, \mathfrak{P}, \mathcal{A}_1\rangle$ *in der axiomatisierten Theorie* $\mathcal{T}_2 = \langle \mathfrak{L}_2, \mathfrak{P}, \mathcal{A}_2\rangle$. *Falls* $\mathcal{A}_1 \vdash \Phi$, *so auch* $\mathcal{A}_2 \vdash \bigwedge_{\eta_1}\ldots\bigwedge_{\eta_k}\left[\hat{\theta}(\eta_1,\ldots,\eta_k) \Longrightarrow rep_{\mathbb{T}}(\Phi)\right]$.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

(2.8) Hilfssatz: *Ist* $\Psi \in \mathfrak{L}_1$ *und* Ψ *logisch allgemeingültig (d.h.* $\emptyset \vdash \Psi$ *), so ist auch* $rep_{\mathbb{T}}(\Psi)$ *allgemeingültig für jede Translation* $\mathbb{T}$.

Zum Beweis von (2.8) bemerken wir nur, daß der Operator *rep* bezüglich der Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ ein Homomorphismus ist und daß Beschränkung von Quantifikatoren auf ein und dasselbe Prädikat logisch allgemeingültige Formeln in ebensolche überführt. (Sätze vom Typ (2.8) sind in der Logik wohlbekannt).

Beweis von (2.7): Sei $\mathcal{A}_1 \vdash \Phi$; dies heißt, daß in $\mathcal{A}_1$ Formeln $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ existieren, so daß $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\} \vdash \Phi$ oder nach dem Deduktionstheorem: $\vdash (\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \Rightarrow \Phi$. Nach (2.8) gilt dann auch: $\vdash rep_{\mathcal{T}}((\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \Rightarrow \Phi)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}_2 \vdash \bigwedge_{\eta_1} \ldots \bigwedge_{\eta_k} [\hat{\theta}(\eta_1, .., \eta_k) \Rightarrow rep_{\mathcal{T}}(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n)]$, da die Φ_ν Axiome sind. Nun folgt sofort die Behauptung.

Der Wert der Begriffsbildung vom *syntaktischen Modell* liegt in dem folgenden Satz:

(2.9) Satz: *$\mathcal{C}_1 = \langle \mathfrak{L}_1, \mathcal{R}, \mathcal{W}_1 \rangle$ und $\mathcal{C}_2 = \langle \mathfrak{L}_2, \mathcal{R}, \mathcal{W}_2 \rangle$ seien elementare Theorien und $\mathcal{C}_2$ widerspruchsfrei. Falls ein syntaktisches Modell $\mathcal{T}$ von $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ existiert, dann ist auch $\mathcal{C}_1$ widerspruchsfrei.*

Der Beweis von (2.9) verläuft ähnlich wie in HÁJEK [14], S.274: angenommen, $\mathcal{C}_1$ wäre nicht widerspruchsfrei, dann gäbe es $P \in \mathfrak{L}_1$ mit $P \in \mathcal{W}_1$ und $(\neg P) \in \mathcal{W}_1$, also $P \wedge (\neg P) \in \mathcal{W}_1$, da $\mathcal{W}_1$ bezüglich $\mathcal{R}$ (= Prädikatenkalkül) abgeschlossen ist. Nach (2.3) gilt:

(o) $$\bigwedge_{\eta_1} \ldots \bigwedge_{\eta_k} [\hat{\theta}(\eta_1, .., \eta_k) \Rightarrow rep_{\mathcal{T}}(P \wedge (\neg P))] \in \mathcal{W}_2$$

Daher und da nach (2.1): $\bigvee_{\eta_1} \ldots \bigvee_{\eta_k} \hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \in \mathcal{W}_2$ gilt:

(+) $$\bigvee_{\eta_1} \ldots \bigvee_{\eta_k} [\hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \wedge rep_{\mathcal{T}}(P)] \in \mathcal{W}_2$$

Nach (o) gilt:

$$\bigwedge_{\eta_1} \ldots \bigwedge_{\eta_k} [(\neg \hat{\theta}(\eta_1, .., \eta_k) \vee rep_{\mathcal{T}}(P)) \wedge (\neg \hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \vee \neg rep_{\mathcal{T}}(P))] \in \mathcal{W}_2$$

und daher auch (verwende [28],S.62,Regel (c),[28], S.55, Regel (f) und [23] S.87 Regel (K_2)):

$$\bigwedge_{\eta_1} \ldots \bigwedge_{\eta_k} \left[\neg \left[\hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \wedge rep_{\mathfrak{T}}(P) \right] \right] \in \mathcal{W}_2$$

Daher (verwende [23] S.86,Regel (K_0) und $\neg\bigvee$ für $\bigwedge\neg$):

$$\bigvee_{\eta_1} \ldots \bigvee_{\eta_k} \left[\hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \wedge rep_{\mathfrak{T}}(P) \right] \wedge$$
$$\wedge \neg \bigvee_{\eta_1} \ldots \bigvee_{\eta_k} \left[\hat{\theta}(\eta_1, \ldots, \eta_k) \wedge rep_{\mathfrak{T}}(P) \right] \in \mathcal{W}_2$$

Dies steht im Widerspruch zur Konsistenz von $\mathcal{T}_2$. Die Annahme der Inkonsistenz von $\mathcal{T}_1$ ist also zu verwerfen, q.e.d.

Wenn $\mathcal{T}_1 = \langle \mathfrak{L}_1, \mathfrak{P}, \mathcal{A}_1 \rangle$ eine Subtheorie von $\mathcal{T}_2 = \langle \mathfrak{L}_2, \mathfrak{P}, \mathcal{A}_2 \rangle$ ist (d.h. wenn $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$ und $\mathcal{A}_2 \vdash \Phi$ für alle Φ aus $\mathcal{A}_1$ gilt) und außerdem $\mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}_2$ gilt, so folgt aus der Existenz eines syntaktischen Modells von $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$, daß die Axiome aus $\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{A}_1$ relativ widerspruchsfrei zu den Axiomen aus $\mathcal{A}_1$ sind. Speziell für die *NBG*-Mengenlehre $\mathcal{T}_{\Sigma^\circ} = \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \Sigma^\circ \rangle$ konnte mit der Methode der parameterfreien syntaktischen Modelle beispielsweise gezeigt werden, daß das Fundierungsaxiom (D), das Auswahlaxiom (E), die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (H) , die Inexistenz unerreichbarer Kardinalzahlen etc. (vergl. v.NEUMANN [32], GÖDEL [13] und SHEPERDSON [40]) mit den Axiomen des Systems Σ° verträglich sind.

Die Methode des *forcing*, wie sie von P.J.COHEN 1963 entwickelt worden ist (vergl. COHEN [4],[5],[6]), verwendet semantische Modelle. COHEN zeigte, daß das

Axiom der Konstruierbarkeit $V = L$ vom System $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ unabhängig ist, daß ferner (H) vom System Σ^* und (E) vom System Σ unabhängig ist. Die Methode des *forcing* ist heute soweit entwickelt worden, daß sie boolesch-wertige parametrische syntaktische Modelle verwendet (VOPĚNKA, SOLOVAY). Die Parameter dieser sog. V-Modelle können auf zwei reduziert werden: auf eine Boolesche Algebra B und einen auf B definierten Ultrafilter *j*. - Uns wird die Methode der parametrischen syntaktischen Modelle im nächsten Paragraphen gestatten, einen kurzen Beweis für die Tatsache zu geben, daß $\bigwedge_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \Longleftrightarrow \bigvee_\eta \xi \in \eta]$ und ähnliche Ausdrücke vom Axiomensystem $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ der *NBG*-Mengenlehre unabhängig sind.

§ 3: Die Unabhängigkeit des Ausdrucks $\bigwedge_\xi[\mathfrak{M}(\xi) \iff \bigvee_\eta \xi \in \eta]$ von den Axiomen der *NBG*-Mengenlehre

In der *NBG*-Mengenlehre Σ^0 ist bekanntlich das primitive Prädikat $\mathfrak{M}(\xi)$ (ξ *ist Menge*) durch den Ausdruck $\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi) \wedge \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\eta) \wedge \xi \in \eta)$ definierbar, denn es gilt:

(3.1) $\{(A1),(A2),(C3)\} \vdash \bigwedge_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \iff \mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi) \wedge \bigvee_\eta (\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\eta) \wedge \xi \in \eta)]$.

Wählt man zum Aufbau der Sprache $\mathcal{S}$ nur die beiden primitiven Prädikate $\in$ und $\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}$ und ersetzt man in den Axiomen des Systems Σ^*, $\mathfrak{M}(\xi)$ durch $\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi) \wedge \bigvee_\eta (\xi \in \eta \wedge \mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\eta))$ (das auf diese Weise erhaltene Axiomensystem werde $\overline{\Sigma^*}$ genannt), dann sind also die beiden Theorien $\mathcal{T}_{\Sigma^*} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma^* \rangle$ und $\mathcal{T}_{\overline{\Sigma^*}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{P}, \overline{\Sigma^*} \rangle$ äquivalent, d.h. es existiert ein parameterfreies syntaktisches Modell von $\mathcal{T}_{\Sigma^*}$ in $\mathcal{T}_{\overline{\Sigma^*}}$ und umgekehrt.

Fügt man zum Axiomensystem $\overline{\Sigma^*}$ das Axiom $\bigwedge_\xi \mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi)$ hinzu (es sei $\Sigma^x = \overline{\Sigma^*} \cup \{ \bigwedge_\xi \mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi) \}$), dann gilt offenbar: $\Sigma^x \vdash \bigwedge_\xi [\mathfrak{Cl}_\mathfrak{B}(\xi) \iff \xi = \xi]$ und das primitive

Prädikat $\mathfrak{Cls}$ ist in Σ^x definierbar. Sei $\mathscr{L}_\in$ die Sprache über dem primitiven Prädikat $\in$ und $\overline{\Sigma^x}$ das Axiomensystem, das man von Σ^x ausgehend erhält, indem man überall $\mathfrak{Cls}(\xi)$ durch $\xi = \xi$ ersetzt. Jetzt sind die beiden Theorien $\mathcal{T}_{\Sigma^x}$ und $\mathcal{T}_{\overline{\Sigma^x}} = \langle \mathscr{L}_\in, \mathcal{T}, \overline{\Sigma^x} \rangle$ äquivalent.

Man kann das Modell Δ von K.GÖDEL [13] dazu benutzen um zu zeigen, daß das Axiom $\bigwedge_\xi \mathfrak{Cls}(\xi)$ widerspruchsfrei zum System Σ^* hinzugenommen werden kann (wir werden dies unten zeigen). Nach (2.9) ist dann $\mathcal{T}_{\overline{\Sigma^x}}$ widerspruchsfrei, wenn $\mathcal{T}_{\Sigma^*}$ es ist. Dies hat die folgende Annehmlichkeit zur Folge: zum Beweis der Verträglichkeit eines Zusatzaxiomes Γ mit den Axiomen des Systems $\overline{\Sigma^x}$ mittels syntaktischer Modelle braucht man nur die eine Transformation $\in \longmapsto \in'$ anzugeben. So verfuhr beispielsweise P.VOPĚNKA in [42] beim Beweis der Unabhängigkeit der verallg. Kontinuumshypothese (H) vom System Σ^* (mit dem einzigen Unterschied, daß er die Gleichheitsrelation „ = " nicht in ihrer logischen Bedeutung als Identität auffaßt, sondern als mathematisch definierte Relation), indem er in der *NBG*-Mengenlehre $\Sigma^* \cup \{ V = L \}$ den Satz

$$\bigvee_j \left[\overline{\Sigma^x}(\in') \wedge \neg(H(\in')) \right]$$

bewies, wo j einen Ultrafilter auf einer (definierbaren) Menge $o = o_\mu^{\vec{\nu}}$ bezeichnet (vergl. [42], S.95-97) und $\overline{\Sigma^x}(\in')$ die Konjunktion der Axiome aus $\overline{\Sigma^x}$ bedeutet, in denen an allen Stellen des Vorkommens $\in$ durch $\in'$ ersetzt worden ist, d.h. in denen $\xi \in \eta$ durch

$\varepsilon'(\xi,\xi,\eta)$ ersetzt wurde - die gleiche Ersetzung führt (H) in $(H(\varepsilon'))$ über - (vergl. MOSTOWSKI [29], S.113).

Da das primitive Prädikat $\mathfrak{M}(\xi)$ in Γ^{0} gemäß (3.1) definierbar ist, kann man fragen, ob $\mathfrak{M}(\xi)$ in Γ^{0} (oder in einer Erweiterung von Γ^{0}) nicht schon durch den einfacheren Ausdruck $\bigvee_{\eta}\ \xi\in\eta$ definiert werden kann. Diese Frage hat insofern besonderes Interesse, als eine Reihe von Axiomatisierungen der Mengenlehre in der Sprache $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ gegeben werden und in ihnen $\mathfrak{M}(\xi)$ durch $\bigvee_{\eta}(\xi\in\eta)$ definiert wird (siehe z.B. E.MENDELSON [28], S.160 oder J.D.HALPERN [18], S.57).

Mit dieser Frage hängt eine zweite Frage eng zusammen: ist in Axiom (A 2) die Bedingung „ $\mathfrak{Klg}(\xi)$ " entbehrlich, d.h. ist die folgende Verschärfung des Axioms (A 2):

(A 2^{+}) $\qquad \bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\left[(\mathfrak{Klg}(\eta)\wedge\xi\in\eta)\Longrightarrow\mathfrak{M}(\xi)\right]$

aus den Axiomen der *NBG*-Mengenlehre ableitbar?

Wir stellen noch eine weitere Frage: ist in der *NBG*-Mengenlehre das primitive Prädikat $\mathfrak{Klg}(\xi)$ durch den Ausdruck $\bigwedge_{\eta}\left[\eta\in\xi\Longrightarrow\mathfrak{M}(\eta)\right]$ definierbar? Betrachten wir also die folgenden fünf Ausdrücke:

$\Phi_1 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\mathfrak{Klg}(\xi)$.

$\Phi_2 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\left[(\xi\in\eta\wedge\mathfrak{Klg}(\eta))\Longrightarrow\mathfrak{M}(\xi)\right]$.

$\Phi_3 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\left[\mathfrak{M}(\xi)\Longleftrightarrow\bigvee_{\eta}\xi\in\eta\right]$.

$\Phi_4 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\left[\mathfrak{Klg}(\xi)\Longrightarrow\bigwedge_{\eta}(\eta\in\xi\Rightarrow\mathfrak{M}(\eta))\right]$.

$\Phi_5 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\left[\mathfrak{Klg}(\xi)\Longleftrightarrow\bigwedge_{\eta}(\eta\in\xi\Rightarrow\mathfrak{M}(\eta))\right]$.

Über die gegenseitige Abhängigkeit dieser Aussagen

gelten offensichtlich die folgenden Behauptungen:

(i) $\{(A\ 2), \Phi_1\} \vdash \Phi_2$.

(ii) $\vdash \Phi_2 \Longleftrightarrow \Phi_4$

(iii) $\vdash \Phi_5 \Longrightarrow \Phi_4$ *und* $\vdash \Phi_3 \Longrightarrow \Phi_4$.

(iv) $\{(A\ 2), (C\ 3), \Phi_1\} \vdash \Phi_3$.

(v) $\vdash (\Phi_1 \wedge \Phi_3) \Longrightarrow \Phi_5$.

Als Beispiel werden wir (ii) beweisen:
$(\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\eta) \wedge \xi \in \eta) \Longrightarrow \mathfrak{M}(\xi)$ ist mit $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\eta) \Rightarrow (\xi \in \eta \Longrightarrow \mathfrak{M}(\xi))$ äquivalent. Die Variable ξ ist in $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\eta)$ nicht frei, es gilt also:

$$\vdash \bigwedge_{\eta} \bigwedge_{\xi} \left[\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\eta) \Rightarrow (\xi \in \eta \Rightarrow \mathfrak{M}(\xi)) \right] \Longleftrightarrow \bigwedge_{\eta} \left[\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}}(\eta) \Rightarrow \bigwedge_{\xi} (\xi \in \eta \Rightarrow \mathfrak{M}(\xi)) \right].$$

Dies ist aber gerade die Behauptung von (ii).

(3.2) Hauptsatz: *Jede der Aussagen* Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 *ist vom Axiomensystem* $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ *unabhängig. Darüberhinaus gilt, daß sowohl die Konjunktion* $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3 \wedge \Phi_4 \wedge \Phi_5$ *als auch die Konjunktion der Negate:* $(\neg \Phi_1) \wedge (\neg \Phi_2) \wedge \ldots \wedge (\neg \Phi_5)$ *mit den Axiomen des Systems* $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ *verträglich sind.*

Beweis: (I): Wir zeigen zunächst, daß $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_5$ mit den Axiomen des Systems $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ verträglich ist. Dazu verwenden wir das (nicht-parametrische) syntaktische Modell Δ von GÖDEL (in GÖDEL [13]). Um die Beschreibung übersichtlicher zu machen, verwenden wir die Terme F und L , die GÖDEL in [13],S.37,Def.9.3,

bzw. S.38, Def.9.4 eingeführt hat: $L = \{ F'\alpha ; \mathfrak{D}(\alpha) \}$.
Die Modellbedingung $\hat{\Phi}$ lautet dementsprechend hier:

$$\hat{\Phi}(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{L}(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{Cl}_3(\xi) \wedge \xi \subseteq L \wedge \bigwedge_{\eta}[(\mathfrak{M}(\eta) \wedge \eta \in L) \Rightarrow \eta \cap \xi \in L].$$

Die primitiven Prädikate $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Cl}_3$, $\in$ werden wie folgt interpretiert: (GÖDEL [13], S.41; siehe auch HÁJEK [14] S.276)

$$\hat{\Psi}_1(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{M}^{\Delta}(\xi) \rightleftharpoons [\mathfrak{M}(\xi) \wedge \xi \in L].$$

$$\hat{\Psi}_2(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{Cl}_3^{\Delta}(\xi) \rightleftharpoons [\mathfrak{Cl}_3(\xi) \wedge \xi \subseteq L \wedge \bigwedge_{\eta}(\mathfrak{M}^{\Delta}(\eta) \Rightarrow \eta \cap \xi \in L)].$$

$$\hat{\Psi}_3(\xi,\eta) \rightleftharpoons \xi \in^{\Delta} \eta \rightleftharpoons [\mathfrak{Cl}_3^{\Delta}(\eta) \wedge \mathfrak{M}^{\Delta}(\xi) \wedge \xi \in \eta].$$

GÖDEL hat in [13] gezeigt, daß $\Delta \rightleftharpoons \langle \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3\} \rangle$ ein (parameterfreies) syntaktisches Modell von $\mathcal{T}_1 \rightleftharpoons \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma^* \cup \{(H)\} \rangle$ in $\mathcal{T}_{\Sigma^0} \rightleftharpoons \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma^0 \rangle$ ist [1]. Insbesondere gilt daher $\Sigma^0 \vdash rep_{\Delta}(A\ 2)$ und : $\Sigma^0 \vdash rep_{\Delta}(C\ 3)$.

---

[1] GÖDEL bewies in [13] nur, daß Δ ein syntaktisches Modell von $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_{\Sigma} \rightleftharpoons \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma \rangle$ ist, bemerkt aber in Kapitel I, S.6, daß das Fundierungsaxiom (D) entbehrlich ist. SHEPERDSON [40], part I, S.164-165, hat alle Stellen aufgeführt, an denen zum Beweis von $rep_{\Delta}(\Sigma^* \cup \{(H)\})$ das Fundierungsaxiom verwendet wird und wie man den Gebrauch von (D) vermeidet. SHEPERDSON hat jedoch übersehen, daß GÖDEL auch in Kapitel VI, S.46, Zeile 17, das Axiom (D) verwendet, um die Annahme $F'\alpha = F'\beta$ zu widerlegen. Aber auch an dieser Stelle kann (D) vermieden werden, da man in Σ^0 durch transfinite Induktion nach α : $\bigwedge_{\xi}[(\mathfrak{M}(\xi) \wedge \xi \in \bigcup_{\alpha} F'\alpha) \Rightarrow \xi \notin \xi]$ beweisen kann, wobei die drei Fallunterscheidungen: $\alpha \in pr_1(J_0)$, $\alpha \in pr_1(J_1)$ und $\alpha \in pr_1(J_i)$, $2 \leqq i \leqq 8$, vorzunehmen sind.

Betrachte zunächst die Transformierte von Φ_1 :

$$rep_\Delta(\Phi_1) = rep_\Delta(\bigwedge_\xi \mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}(\xi))$$
$$= \bigwedge_\xi [\hat{\Phi}(\xi) \Longrightarrow rep_\Delta(\mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}(\xi))]$$
$$= \bigwedge_\xi [\mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\Delta(\xi) \Longrightarrow \mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\Delta(\xi)]$$

(nach Def.(2.2) und wegen $\hat{\Phi}(\xi) = \hat{\Psi}_2(\xi) = \mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\Delta(\xi)$). $rep_\Delta(\Phi_1)$ ist also allgemeingültig und daher gilt erst recht $\Sigma^\circ \vdash rep_\Delta(\Phi_1)$.

Das Deduktionstheorem (vergl.[23] S.100) und (i) von S.29 liefern: $\vdash [((A\ 2) \wedge \Phi_1) \Longrightarrow \Phi_2]$. Nach (2.8), S.22, gilt:

$$\vdash [(rep_\Delta(A\ 2) \wedge rep_\Delta(\Phi_1)) \Longrightarrow rep_\Delta(\Phi_2)]$$

und Anwendung des modus ponens ergibt: $\Sigma^\circ \vdash rep_\Delta(\Phi_2)$.

Ganz analog folgt nach (iv), S.29, daß $\Sigma^\circ \vdash rep_\Delta(\Phi_3)$ gilt. Nach (iii) von S.29, Satz (2.8) und dem modus ponens erhalten wir $\Sigma^\circ \vdash rep_\Delta(\Phi_4)$ und nach (v), S.29, $\Sigma^\circ \vdash rep_\Delta(\Phi_5)$. Damit ist Teil (I) bewiesen.

(II): wir zeigen jetzt, daß $(\neg\Phi_1) \wedge \ldots \wedge (\neg\Phi_5)$ mit den Axiomen des Systems $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ verträglich ist. Betrachte die Translation:

$$\nabla = \langle \hat{\theta}, \hat{\Phi}, \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3\} \rangle$$

wo

$$\hat{\theta}(\kappa) = \mathfrak{M}(\kappa) \wedge \kappa \notin L ,$$
$$\hat{\Phi}(\kappa,\xi) = (\kappa = \xi \wedge \hat{\theta}(\kappa)) \vee (\mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\Delta(\xi) \wedge \hat{\theta}(\kappa))$$

und

$$\hat{\Psi}_1(\kappa,\xi) = \mathfrak{M}^\nabla(\xi) = \mathfrak{M}^\Delta(\xi) ,$$
$$\hat{\Psi}_2(\kappa,\xi) = \mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\nabla(\xi) = \mathfrak{C}\mathfrak{l}_\mathfrak{S}^\Delta(\xi) ,$$

$$\hat{\Psi}_3(\kappa,\xi,\eta) \;=\; \xi \in^{\nabla} \eta \;=\; [(\xi = \kappa \wedge \hat{\theta}(\kappa) \wedge \mathfrak{Cls}^{\Delta}(\eta)) \vee$$
$$\vee\ \xi \in^{\Delta} \eta\ ]$$

Das ∇ - Modell hat also dieselben Mengen und Klassen, die das GÖDELsche Δ - Modell hat, nur die $\in$-Relation $\in^{\Delta}$ ist so erweitert worden, daß die nicht-konstruktible Menge κ Element einer jeden ∇ - Klasse ist. Die Axiome des Systems $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ haben die Struktur, daß alle Variablen auf die Prädikate $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Cls}$ eingeschränkt sind. Daher und weil $\mathfrak{M}(\kappa) \wedge \kappa \notin L$, also auch $\neg\, \mathfrak{M}^{\nabla}(\kappa)$ gilt, ist mit Δ auch ∇ ein (jetzt allerdings parametrisches) syntaktisches Modell von $\mathfrak{T}_1 = \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \Sigma^* \cup \{(H)\} \rangle$ in

$$\mathfrak{T}_2 = \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \Sigma^{\circ} \cup \{ \bigvee_{\kappa} (\mathfrak{M}(\kappa) \wedge \kappa \notin L) \} \rangle$$

(Wir müssen das Axiom $\mathcal{V} \neq L \iff \bigvee_{\kappa}(\mathfrak{M}(\kappa) \wedge \kappa \notin L)$ zur Axiomenmenge Σ° hinzunehmen, um nachweisen zu können, daß ∇ eine Translation ist).

Nach Konstruktion von ∇ gilt $\hat{\Phi}(\kappa,\kappa) \wedge \neg\, \mathfrak{Cls}^{\nabla}(\kappa)$ und daher: $\Sigma^{\circ} \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_{\kappa}[\hat{\theta}(\kappa) \Rightarrow \bigvee_{\xi}[\hat{\Phi}(\kappa,\xi) \wedge \neg\, \mathfrak{Cls}^{\nabla}(\xi)]]$

Das heißt nach Def.(2.2):

$$\Sigma^{\circ} \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_{\kappa}[\,\hat{\theta}(\kappa) \Rightarrow rep_{\nabla}(\neg\, \Phi_1)\,].$$

Für jedes κ mit $\hat{\theta}(\kappa)$ gilt und für jede ∇ - Klasse η :

$$\hat{\Phi}(\kappa,\kappa) \wedge \hat{\Phi}(\kappa,\eta) \wedge \mathfrak{Cls}^{\nabla}(\eta) \wedge \kappa \in^{\nabla} \eta \wedge \neg\, \mathfrak{M}^{\nabla}(\kappa).$$

Da andererseits ∇ - Klassen existieren, gilt für $\kappa = \xi$:

$$\Sigma^{\circ} \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_{\kappa}[\hat{\theta}(\kappa) \Rightarrow \bigvee_{\xi} \bigvee_{\eta}[(\hat{\Phi}(\kappa,\xi) \wedge \hat{\Phi}(\kappa,\eta) \wedge$$
$$\wedge\, \mathfrak{Cls}^{\nabla}(\eta) \wedge \xi \in^{\nabla} \eta) \wedge \neg\, \mathfrak{M}^{\nabla}(\xi)]].$$

Dies heißt aber gerade:

$$\Sigma^0 \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_\kappa [\hat{\theta}(\kappa) \Longrightarrow rep_\nabla(\neg \Phi_2)].$$

Nach (ii) von S. 29 folgt nun sofort:

$$\Sigma^0 \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_\kappa [\hat{\theta}(\kappa) \Longrightarrow rep_\nabla(\neg \Phi_4)]$$

und aus (iii),S.29, durch Kontraposition:

$$\Sigma^0 \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_\kappa [\hat{\theta}(\kappa) \Longrightarrow rep_\nabla(\neg \Phi_5)]$$

und

$$\Sigma^0 \cup \{\mathcal{V} \neq L\} \vdash \bigwedge_\kappa [\theta(\kappa) \Longrightarrow rep_\nabla(\neg \Phi_3)].$$

Damit ist auch Teil (II) bewiesen.

(III): wir haben bisher gezeigt, daß ∇ ein syntaktisches Modell von

$$\mathcal{T}_3 = \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma^* \cup \{(H), \neg\Phi_1, \neg\Phi_2, .., \neg\Phi_5\}\rangle$$

in $\mathcal{T}_2 = \langle \mathcal{L}, \mathcal{P}, \Sigma^0 \cup \{\mathcal{V} \neq L\}\rangle$ ist. Nach Satz (2.9) ist $\mathcal{T}_3$ widerspruchsfrei wenn $\mathcal{T}_2$ es ist. P.J.COHEN hat jedoch in [4],[5],[6] gezeigt, daß das Konstruktibilitätsaxiom $\mathcal{V} = L$ (d.h. *Jede Menge ist von der leeren Menge $\emptyset$ ausgehend durch Iteration der acht fundamentalen Operationen $\mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_8$* (GÖDEL [13],Def. 9.1) *konstruierbar*) von den Axiomen der Mengenlehre (einschließlich Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese) unabhängig ist. Daher ist $\mathcal{T}_2$ widerspruchsfrei, wenn $\mathcal{T}_{\Sigma^0}$ es ist, und folglich ist $\mathcal{T}_3$ widerspruchsfrei, wenn $\mathcal{T}_{\Sigma^0}$ es ist. Dies beendet den Beweis von (3.2). □

Wie bemerken noch, daß aus Satz (3.2) folgt, daß das Axiom (δ) des ACKERMANNschen Axiomensystems (ACKERMANN [1]):

$$(\delta) \qquad \bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{M}(\xi) \wedge (\eta \in \xi \vee \eta \subseteq \xi)) \Longrightarrow \mathfrak{M}(\eta)]$$

nicht aus $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ ableitbar ist. Dies ist ein kaum bemerkter Unterschied zwischen beiden Axiomensystemen.

Nach Axiom (A 1) ist jede Menge eine Klasse. Klassen, die keine Mengen sind, werden *echte Klassen* (*proper classes*, GÖDEL [13],S.3,Def.1) genannt:

(3.3) Def. $\mathfrak{Pr}(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \wedge \neg\, \mathfrak{M}(\xi)$.

Klassen sind also entweder Mengen oder echte Klassen. Analog zur Frage, ob in der *NBG*-Mengenlehre das Prädikat $\mathfrak{M}(\xi)$ durch $\bigvee_{\eta}\, \xi \in \eta$ definierbar ist, stellt sich jetzt die Frage, ob das Prädikat $\mathfrak{Pr}(\xi)$ durch $\neg \bigvee_{\eta}\, \xi \in \eta$ in der *NBG*-Mengenlehre definiert werden kann. Betrachten wir also den folgenden Ausdruck:

$$\Phi_6 \rightleftharpoons \bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{Pr}(\xi) \Longleftrightarrow \neg \bigvee_{\eta}\, \xi \in \eta \,\right].$$

Trivialerweise gilt $\vdash \bigwedge_{\xi}\left[\, \bigvee_{\eta}\, \xi \in \eta \vee \neg \bigvee_{\eta}\, \xi \in \eta \,\right]$ und daher:

(+) $\{\, \Phi_3 \,,\, \Phi_6 \,\} \vdash \bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{m}(\xi) \vee \mathfrak{Pr}(\xi)\right]$.

Ferner gilt $\{(A\ 1)\} \vdash \bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \Longleftrightarrow (\mathfrak{m}(\xi) \vee \mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi))\right]$ oder, da $\mathfrak{M}(\xi) \vee \neg\, \mathfrak{M}(\xi)$ stets wahr ist:

(++) $\{\, (A\ 1) \,\} \vdash \bigwedge_{\xi}\left[\, \mathfrak{Kl}_{\mathfrak{S}}(\xi) \Longleftrightarrow \left(\mathfrak{m}(\xi) \vee \mathfrak{Pr}(\xi)\right)\right]$.

Aus (+) und (++) ergibt sich unter Verwendung des Deduktionstheorems: (vergl. [28] S.62, *1(a)* und *1(c)*):

(vi) $\{\, (A\ 1) \,\} \vdash (\Phi_3 \wedge \Phi_6) \Rightarrow \Phi_1$.

Ferner gilt:

(vii) $\{\, (A\ 1),(A\ 2),(C\ 3) \,\} \vdash \Phi_1 \Rightarrow \Phi_6$.

Aus (iv), (vi) und (vii) ergibt sich nun sofort:

(viii) $\{(A\,1),(A\,2),(C\,3)\} \vdash \Phi_1 \Longleftrightarrow (\Phi_3 \wedge \Phi_6)$.

(3.4) Satz: *Die Aussage* Φ_6 *ist vom Axiomensystem* $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ *unabhängig.*

Beweis: Da alle Axiome aus $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ im GÖDELschen Modell Δ gelten und nach Satz (3.2) auch Φ_1 , folgt aus (vii),S.34, sofort, daß auch Φ_6 in Δ gilt. Daher ist Φ_6 mit den Axiomen des Systems $\Sigma^* \cup$ $\cup \{(H)\}$ verträglich.

Wir zeigen nun, daß $\neg \Phi_6$ mit $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ verträglich ist.

Wir bemerken zunächst, daß $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) von I.L. NOVAK [33],S.88, erfüllt. Das System $\Sigma^* \cup \{(H)\}$ sei daher (S) genannt. Wir konstruieren eine Erweiterung (S') des Systems (S), wie sie I.L.NOVAK in [33], S.88-89, angegeben hat. Anstatt eine neue Sorte von Variablen (etwa große griechische Buchstaben) einzuführen können wir (äquivalent) ein neues einstelliges primitives Prädikat $\mathfrak{G}$ (intendierte Interpretation: *ist Gesamtheit*) einführen. $\mathcal{S}'$ sei die formale Sprache, die man ausgehend von den Primformeln $\xi = \eta$, $\mathfrak{M}(\xi)$, $\mathfrak{Elg}(\xi)$, $\mathfrak{G}(\xi)$ und $\xi \in \eta$ unter Verwendung der logischen Verknüpfungszeichen wie üblich erhält (vergl. S.8). Eine neue Sorte von Variablen (etwa A , B , Γ , ...) kann man nun wie folgt einführen: $\bigwedge_{\Gamma} \mathfrak{A}(\Gamma)$ steht für $\bigwedge_{\xi}[\,\mathfrak{G}(\xi) \Longrightarrow \mathfrak{A}(\xi)\,]$.

Wir werden nicht wie bei I.L. NOVAK [33] ,S. 88, ein neues zweistelliges primitives Prädikat „ ∘ " einführen, sondern dem Prädikat „ ∈ " einen größeren Gültigkeitsbereich geben (dies ist nach I.L.NOVAK [33] S.88,Fußnote 4, zulässig).

Den Begriff der *primitiven Aussage-Funktion* (abgekürzt: *pAF*) wird wie folgt erklärt (vergleiche K.GÖDEL [13],S.8, und I.L.NOVAK [33],S.88-89):

(1) *Die Primformeln* $\xi = \eta$, $\mathfrak{M}(\xi)$, $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{B}}(\xi)$, $\mathfrak{G}(\xi)$, $\xi \in \eta$ *sind pAF's.*

(2) *Wenn* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *pAF's sind, so sind auch* $\neg\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ *pAF's.*

(3) *Wenn* $\mathfrak{A}$ *eine pAF ist, so sind auch* $\bigvee_{\xi}[\mathfrak{M}(\xi) \wedge \mathfrak{A}]$ *und* $\bigvee_{\xi}[\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{B}}(\xi) \wedge \mathfrak{A}]$ *pAF's.*

(4) *Nur Ausdrücke, die mittels der Regeln* (1), (2), (3) *erhalten werden können, heißen pAF's.*

Die Axiome der Erweiterung (S') können damit wie folgt angegeben werden:

(a) (S') *enthält alle Axiome von* (S).

(b) *Wenn* $\mathfrak{A}$ *eine pAF ist mit der einzigen freien Variablen* ξ *, dann ist*

$$\bigvee_{\eta}\Big[\mathfrak{G}(\eta) \wedge \bigwedge_{\xi}[\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{B}}(\xi) \Longrightarrow (\xi \in \eta \Longleftrightarrow \mathfrak{A}(\xi))]\Big]$$

ein Axiom von (S').

(c) (S') *enthält schließlich noch die drei Axiome:*

(F1) $\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [\mathfrak{G}(\xi) \wedge \mathfrak{G}(\eta) \rightarrow [\xi = \eta \leftrightarrow \bigwedge_\zeta [\mathfrak{Clg}(\xi) \rightarrow (\zeta \in \xi \leftrightarrow \zeta \in \eta)]]]$,

(F2) $\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [(\mathfrak{Clg}(\xi) \wedge \mathfrak{Clg}(\eta) \wedge \xi = \eta) \rightarrow$

$\rightarrow \bigwedge_\zeta (\mathfrak{G}(\zeta) \rightarrow (\eta \in \zeta \leftrightarrow \xi \in \zeta))]$,

(F3) $\bigwedge_\xi [\mathfrak{Clg}(\xi) \rightarrow \bigvee_\eta (\mathfrak{G}(\eta) \wedge \xi = \eta)]$.

I.L.NOVAK hat in [33], Theorem III, S. 106, gezeigt, daß (S') widerspruchsfrei ist, falls (S) widerspruchsfrei ist (vorausgesetzt, die Arithmetik der natürlichen Zahlen ist widerspruchsfrei).

Wir beweisen nun in der erweiterten Theorie $\mathfrak{T}_{S'} = \langle \mathscr{S}', \mathscr{T}, (S') \rangle$ den Satz: $\bigvee_\xi [\mathfrak{Pr}(\xi) \wedge \bigvee_\eta (\mathfrak{G}(\eta) \wedge \xi \in \eta)]$. In der Tat, zur *pAF* $\mathfrak{Clg}(\xi)$ existiert nach (b) eine Gesamtheit η, welche alle Klassen zu Elementen hat. Nach Axiom (F1) ist diese Klasse eindeutig bestimmt und wir können für sie den Term $\mathcal{G}$ einführen. Es gilt dann insbesondere: $\mathfrak{V} \in \mathcal{G}$ mit $\mathfrak{Pr}(\mathfrak{V})$; daraus folgt nun (vergl.Regel 2(b) Ex. in [28] ,S.55) sofort der behauptete Satz: $(S') \vdash \bigvee_\xi [\mathfrak{Pr}(\xi) \wedge \bigvee_\eta (\mathfrak{G}(\eta) \wedge \xi \in \eta)]$. Nach der Verdünnungsregel können wir den Zusatz $\mathfrak{G}(\eta)$ in: $\bigvee_\eta (\mathfrak{G}(\eta) \wedge \xi \in \eta)$ fortlassen und erhalten nach einer einfachen Umformung:

(3.5) $(S') \vdash \neg \bigwedge_\xi [\mathfrak{Pr}(\xi) \rightarrow \neg \bigvee_\eta \xi \in \eta]$.

Da (S') widerspruchsfrei ist (die Widerspruchsfreiheit von (S) wird vorausgesetzt), kann Φ_6 nach (3.5) nicht aus (S') und damit erst recht nicht aus $(S) = \Sigma^* \cup \{(H)\}$ abgeleitet werden. Damit ist Satz (3.4) bewiesen.

Das Axiomensystem (S'), das wir, um (3.4) zu

beweisen aufgestellt hatten, hat die Eigenschaft, daß in ihm Klassen zu *Gesamtheiten* zusammengefaßt werden können. Ähnlich wie (S) zum System (S') erweitert worden ist, kann (S') wiederum zu einem System (S'') und dieses zu einem System (S''') etc. erweitert werden. Induktiv schließend erhält man, daß nach Theorem III von I.L.NOVAK [33],S.106, alle diese Axiomensysteme $(S^{(n)})$ widerspruchsfrei sind, falls $(S) = \Sigma^* \cup \{(H)\}$ widerspruchsfrei ist, oder nach GÖDEL [13], falls Σ^o widerspruchsfrei ist. Nach dem Endlichkeitssatz (auch Kompaktheitssatz genannt) der Prädikatenlogik 1.Stufe ist dann auch die Union $(S_o) = \bigcup_{n<\omega} (S^{(n)})$ widerspruchsfrei, wenn Σ^o es ist.

Der gegenwärtige Stand der Algebra hat eine Erweiterung der bisher existierenden Axiomensysteme der Mengenlehre notwendig gemacht (als Beispiele seien die Theorie der Kategorien, die Theorie der Radikale in der Ringtheorie und die Theorie der Varietäten in der Gruppentheorie genannt). Eine Darstellung im System (S_o) löst die dort bestehenden mengentheoretischen Probleme.

§ 4: Die lokalen, globalen, universellen, Mengen- und Klassen-Formen von Ausdrücken der *NBG*-Mengenlehre

Die *NBG*-Mengenlehre hat neben dem zweistelligen primitiven Prädikat $\in$ noch die beiden einstelligen primitiven Prädikate $\mathfrak{M}$ (*ist Menge*) und $\mathfrak{Kl}$ (*ist Klasse*). Dementsprechend können Aussagen der *NBG*-Mengenlehre in Mengen- und in Klassenform, in lokaler, globaler und universeller Form gegeben werden.

Bevor wir diese Begriffe definieren sei darauf hingewiesen, daß wir von nun an uns der Hilfssprache $\mathcal{L}'$ bedienen werden, die in § 1 eingeführt worden ist. Die Ausdrücke aus $\mathcal{L}'$ dürfen Mengenvariable (x, y, z,...) und Klassenvariable (X, Y, Z,...) enthalten, Symbole für Konstanten (z.B. $\emptyset$, $\mathcal{V}$, $\mathfrak{C}$, ω, $\aleph_\alpha$ etc.), Funktionen (z.B. $\mathcal{P}$, $\cup$, $\cap$, $\times$ etc.), definierte Prädikate (z.B. $\mathfrak{Fnc}$, $\mathfrak{Comp}$ etc.), die in $\mathcal{L}$ eine Definition haben. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß, wenn A eine Funktion ist und $\langle x,y\rangle \in A$ gilt,

mit $A'y$ das Bild von y unter A bezeichnet wird, also $pr_2(A)$ der *Definitionsbereich (= Urbildbereich)* von A und $pr_1(A)$ der *Wertebereich (Bildbereich)* von A ist (vergl. GÖDEL [13], S.16), wenn

$$pr_i(R) = \{ x ; \bigvee_{y_1} \cdots \bigvee_{y_n} \langle y_1, .., y_{i-1}, x, y_{i+1}, .., y_n \rangle \in R \}$$

(Projektion auf die i-te Koordinate) ist.

Ist $\Phi(x)$ eine Formel mit der freien Variablen x, so wird mit $\Phi(^x/_y)$ diejenige Formel bezeichnet, die aus $\Phi(x)$ dadurch hervorgeht, daß an allen Stellen des freien Vorkommens von x in Φ, x durch y ersetzt wird. Um lange Ausdrücke übersichtlicher zu machen, werden wir jedoch häufig $\Phi(y)$ statt $\Phi(^x/_y)$ schreiben.

(4.1) Meta-Definition: Sei $\Phi(x_1, .., x_n)$ ein Ausdruck aus $\mathcal{L}'$ mit genau n freien Variablen und $\Psi(x_1, .., x_n, x_{n+1})$ einer mit genau $n+1$ freien Variablen. Wir nennen den Ausdruck (Existenzsatz) der Gestalt:

$$\bigwedge_{x_1} \cdots \bigwedge_{x_n} [\Phi(x_1, .., x_n) \Longrightarrow \bigvee_{x_{n+1}} [\Psi(x_1, .., x_n, x_{n+1})]]$$

die zum Paar $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige *Mengenform* und den Ausdruck der Gestalt:

$$\bigwedge_x [\bigwedge_y (y \in x \Rightarrow \bigvee_{u_1} \cdots \bigvee_{u_n} (y = \langle u_1, .., u_n \rangle \wedge \Phi(u_1, .., u_n)))$$
$$\Longrightarrow \bigvee_f [\mathfrak{Funk}(f) \wedge pr_2(f) = x \wedge \bigwedge_{y \in x} \Psi(pr_1(y), .., pr_n(y), f'y)]]$$

die zum Paar $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige *lokale Form*. Den Ausdruck der Gestalt:

$$\bigwedge_{X_1}\cdots\bigwedge_{X_n}\Big[\,\Phi(X_1,..,X_n) \Longrightarrow \bigvee_{X_{n+1}}\Psi(X_1,..,X_n,X_{n+1})\Big]$$

nennen wir die zum Paar $\langle \Phi, \Psi\rangle$ gehörige *Klassenform* und den Ausdruck der Gestalt:

$$\bigwedge_X\Big[\bigwedge_y\big(y\in X \Rightarrow \bigvee_{u_1}\cdots\bigvee_{u_n}\big(y=\langle u_1,..,u_n\rangle \wedge \Phi(u_1,..,u_n)\big)\big)$$

$$\Longrightarrow \bigvee_F\Big(\mathfrak{Fnc}(F)\wedge X=pr_2(F)\wedge \bigwedge_{y\in X}\Psi(pr_1(y),..,pr_n(y),F'y)\Big)\Big]$$

die zum Paar $\langle \Phi, \Psi\rangle$ gehörige *globale Form*.

Schließlich nennen wir den Ausdruck der Form:

$$\bigvee_F\Big[\mathfrak{Fnc}(F)\wedge pr_2(F)=\{x\ ;\ \bigvee_{u_1}\cdots\bigvee_{u_n}\big(x=\langle u_1,\ldots,u_n\rangle \wedge$$

$$\wedge\,\Phi(u_1,\ldots,u_n)\big\}\ \wedge\ \bigwedge_y\big(y\in pr_2(F)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Psi(pr_1(y),\ldots,pr_n(y),F'y)\big)\Big]$$

die zum Paar $\langle \Phi, \Psi\rangle$ gehörige *universelle Form*.

Dabei ist noch folgendes zu bemerken: wir haben vorausgesetzt, daß u_i und X_i frei für x_i in Φ und $pr_i(y)$ und X_i frei für x_i und $f'y$, $F'y$ und X_{n+1} frei für x_{n+1} in Ψ sind (zur Def. von *frei in* siehe MENDELSON [28], S.48).

Wir haben in (4.1) die Bezeichnung „lokale Form" gewählt, da die Aussage „im Kleinen", d.h. für Mengen von Mengen gilt, und „globale Form", da die entsprechende Aussage „im Großen", d.h. für Klassen von Mengen gilt.

(4.2) Satz: *Seien* $\Phi(x_1,..,x_n)$ *und* $\Psi(x_1,..,x_n,x_{n+1})$ *Ausdrücke aus* $\mathcal{L}'$ *mit genau* n *bzw.* $n+1$ *frei-*

en Variablen und Φ eine „ppf" (primitive propositional function im Sinne von GÖDEL [13], S.8), dann sind im System Σ^{o} die zu $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige globale und die universelle Form äquivalent.

Beweis: Nach dem allgemeinen Existenzsatz (M 1) in GÖDEL [13], S.8, existiert eine Klasse A, welche die Bedingung $\langle x_1,..,x_n \rangle \in A \iff \Phi(x_1,..,x_n)$ erfüllt. Setzt man die globale Form voraus, so existiert zur Klasse A eine Funktion F, mit dem Definitionsbereich A, so daß für jedes $y \in A$ gilt:

$$(+) \qquad \Psi\left({}^{x_1}/_{pr_1(y)}, \ldots, {}^{x_n}/_{pr_n(y)}, {}^{x_{n+1}}/_{F'y}\right)$$

Diese Funktion F erfüllt also auch die zu $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige universelle Form.

Die umgekehrte Richtung, nämlich, daß die universelle Form stets die globale impliziert, ist trivial, denn ist X eine Klasse, die die Bedingung:

$$\bigwedge_y \left[y \in X \Longrightarrow \bigvee_{u_1} \cdots \bigvee_{u_n} \left(y = \langle u_1,..,u_n \rangle \wedge \Phi\left({}^{x_1}/_{u_1}, \ldots, {}^{x_n}/_{u_n}\right)\right)\right]$$

erfüllt, so ist X offenbar eine Teilklasse der Klasse $pr_2(F)$ und $F \upharpoonright X$ (wo $F \upharpoonright X = F \cap (\mathcal{V} \times X)$) erfüllt die Bedingungen der globalen Form; dabei war F eine Funktion, die die universelle Form erfüllt. Damit ist (4.2) bewiesen.

Wir führen die folgende Bezeichnungsweise ein:

(4.3) Meta-Definition: Seien Φ und Ψ Ausdrücke wie in (4.1); dann ist:

$(M\text{-}\Phi, \Psi) =$ *die zu $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige Mengenform,*

$(Lok\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons$ *die zu* $\langle\Phi,\Psi\rangle$ *gehörige lokale Form,*

$(Cls\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons$ *die zu* $\langle\Phi,\Psi\rangle$ *gehörige Klassenform,*

$(Gl\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons$ *die zu* $\langle\Phi,\Psi\rangle$ *gehörige globale Form,*

$(Univ\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons$ *die zu* $\langle\Phi,\Psi\rangle$ *gehörige universelle Form.*

Mit dieser Bezeichnungsweise gilt also nach (4.2) $\Sigma^0 \vdash (Gl\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Uviv\text{-}\Phi,\Psi)$ sofern Φ eine primitive Aussagenfunktion (ppf = primitive propositional function) im Sinne von GÖDEL [13],S.8), ist, während $\Sigma^0 \vdash (Univ\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Gl\text{-}\Phi,\Psi)$ für alle Formelpaare $\langle\Phi,\Psi\rangle$ mit n bzw. $n+1$ freien Mengenvariablen gilt. Es ist klar, daß stets:

(4.4) $\quad \Sigma^0 \vdash (lok\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi,\Psi)$

(4.5) $\quad \Sigma^0 \vdash (Gl\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi,\Psi)$

gilt. Dabei gilt (4.5) aufgrund von Axiom (A 1) und da $\mathfrak{Cls}(F) \wedge x = pr_2(F) \wedge \mathfrak{M}(x) \wedge \mathfrak{Fnc}(F)$ nach Axiom (C 4) sofort $\bigvee_f (F = f)$ nachsichzieht.

$(Cls\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi,\Psi)$ ist im Allgemeinen nicht richtig, da nach $(Cls\text{-}\Phi,\Psi)$ zu $x_1,..,x_n$ zwar eine Klasse X_{n+1} mit $\Psi(x_1,..,x_n, X_{n+1})$ existiert, X_{n+1} aber nicht notwendig Menge zu sein braucht. Ist jedoch:

(+) $\quad \bigwedge_{x_1} \cdots \bigwedge_{x_n} \bigwedge_{X_{n+1}} \left[\Psi(x_1,..,x_n,X_{n+1}) \Longrightarrow \mathfrak{M}(X_{n+1})\right]$

(etwa in Σ^0) beweisbar, so ist (in Σ^0) auch $(Cls\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi,\Psi)$ beweisbar.

Im Falle der Fundierungsaxiome ist (+) erfüllt;

sei nämlich $\Phi(x) \rightleftharpoons (x \neq \emptyset)$ und $\Psi(x,y) \rightleftharpoons (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)$, so ist

(D') $$\bigwedge_x \left[x \neq \emptyset \Longrightarrow \bigvee_y (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset) \right]$$

die Mengenform des Fundierungsaxioms und das Axiom

(D) $$\bigwedge_X \left[X \neq \emptyset \Longrightarrow \bigvee_Y (Y \in X \wedge X \cap Y = \emptyset) \right]$$

die Klassenform. Die Bedingung (+) von S.43 ist hier aufgrund von Axiom (A 2) erfüllt. Bekanntlich gilt hier sogar $\Sigma^0 \vdash (D') \Longleftrightarrow (D)$ (siehe z.B. BERNAYS [3], S.202). VOPĚNKA und HÁjek zeigten in [44] jedoch, daß diese Äquivalenz verloren geht, wenn man das Unendlichkeitsaxiom (C 1) aus Σ^0 herausnimmt; das entsprechende Resultat für die ZERMELO-FRAENKELsche Mengenlehre hat HAUSCHILD in [20] erzielt.

Der Anlaß, Ausdrücke der *NBG*-Mengenlehre als Mengen- und Klassenformen, lokale, globale und universelle Formen zu bezeichnen, ist nicht nur die unterschiedliche Struktur der beiden Fundierungsaxiome (D) und (D'), sondern die unterschiedliche Struktur der einzelnen Auswahlaxiome und seiner Konsequenzen. Sei $\Phi(x) \rightleftharpoons (x \neq \emptyset)$ und $\Psi(x,y) \rightleftharpoons (y \in x)$, dann ist $(M\text{-}\Phi,\Psi)$ aus Σ^0 offenbar ableitbar, $(Lok\text{-}\Phi,\Psi)$ ist jedoch das *lokale Auswahlaxiom* (auch *Auswahlaxiom der ZERMELO-FRAENKELschen Mengenlehre* genannt), das wir wie üblich mit *(AC)* (=axiom of choice) bezeichnen wollen,und $(Univ\text{-}\Phi,\Psi)$ ist das *universelle Auswahlaxiom (E)* der *NBG*-Mengenlehre. Da *(E)* nach (4.2) mit $(Gl\text{-}\Phi,\Psi)$ äquivalent ist, werden wir *(E)* auch das *globale Auswahlaxiom* nennen.

P.J.COHEN hat in [4] ,[5],[6] als Erster bewiesen, daß *(AC)* nicht aus Σ ableitbar ist. W.B. EASTON hat in [10] gezeigt, daß *(E)* nicht aus $\Sigma \cup \{(AC)\}$ ableitbar ist. A.LÉVY hat in [25] die bemerkenswerte Tatsache bewiesen, daß in einer Erweiterung der ACKERMANNschen Mengenlehre das lokale Auswahlaxiom mit dem globalen äquivalent ist. Diese Erweiterung besteht aus den vier Axiomen (bzw. Axiomenschemata) von ACKERMANN [1] und dem (lokalen) Fundierungsaxiom. Wir geben eine kurze Beschreibung der ACKERMANNschen Mengenlehre.

Die Sprache $\mathcal{L}_{\hat{A}}$ der ACKERMANNschen Mengenlehre ist die Menge aller Ausdrücke, die man ausgehend von den Primformeln $\xi = \eta$, $\xi \in \eta$ und $\mathfrak{M}(\xi)$ unter Verwendung der logischen Zeichen in üblicher Weise (vergl. S.8) erhält. Legt man nur die beiden Primformeln $\xi \in \eta$ und $\xi = \eta$ zugrunde, so erhält man die Sub-Sprache $\mathcal{L}_{\in}$ (vergl. S.27). Als Axiome werden die folgenden Ausdrücke aus $\mathcal{L}_{\hat{A}}$ ausgezeichnet:

(α) *Ist* Φ *ein Ausdruck aus* $\mathcal{L}_{\hat{A}}$ *, dann ist*

$$\bigwedge_{\xi}\left[\Phi(\xi) \Rightarrow \mathfrak{M}(\xi)\right] \Rightarrow \bigvee_{\eta}\bigwedge_{\zeta}\left[\zeta \in \eta \iff \Phi(\zeta)\right]$$

ein Axiom.

(β) $$\bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\left[\bigwedge_{\zeta}(\zeta \in \xi \iff \zeta \in \eta) \Rightarrow \xi = \eta\right].$$

(γ) *Ist* Φ *ein Ausdruck aus* $\mathcal{L}_{\in}$ *, dann ist*

$$\left(\mathfrak{M}(\xi_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{M}(\xi_n)\right) \Rightarrow \left[\bigwedge_{\eta}\left(\Phi(\eta) \Rightarrow \mathfrak{M}(\eta)\right)\right.$$
$$\left.\Rightarrow \bigvee_{\zeta}\left(\mathfrak{M}(\zeta) \wedge \bigwedge_{\tau}(\tau \in \zeta \iff \Phi(\tau))\right)\right]$$

ein Axiom.

$$(\delta)\quad \bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\left[\left(\mathfrak{M}(\xi)\wedge\left(\eta\in\xi\vee\eta\subseteq\xi\right)\right)\Longrightarrow\mathfrak{M}(\eta)\right].$$

Dabei ist das Axiomenschema (γ) so aufzufassen, daß $\xi_1,\ldots,\xi_n$ genau die neben η in Φ vorkommenden freien Variablen sind; kommen solche in Φ nicht vor, so fällt „ $\mathfrak{M}(\xi_1)\wedge\ldots\wedge\mathfrak{M}(\xi_n)$ " fort.

Die Menge der durch (α), (β), (γ), (δ) ausgezeichneten Ausdrücke wird mit $\hat{A}$ bezeichnet. Die Theorie $\mathcal{T}_{\hat{A}} = \langle \mathcal{L}_{\hat{A}}, \mathcal{P}, \hat{A}\rangle$ heißt *ACKERMANNsche Mengenlehre.*

Ist $\mathfrak{K}$ ein (neues) einstelliges Prädikatensymbol, so kann man bekanntlich den Ausdruck $\bigwedge_{\xi}\mathfrak{K}(\xi)$ widerspruchsfrei zu $\hat{A}$ hinzufügen, da das primitive Prädikat $\mathfrak{K}(\xi)$ in den Axiomen aus $\hat{A}$ nicht vorkommt. $\mathfrak{K}(\xi)$ darf man, wenn man will, lesen als „ ξ *ist Klasse*". Dies bedeutet, daß man die Subjektvariablen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... von $\mathcal{T}_{\hat{A}}$ als *Klassenvariablen* bezeichnen darf (dies geschieht bei LÉVY [25], S. 154).

Nach Axiom (α) existiert zu $\Phi(\xi) = \mathfrak{M}(\xi)$ eine „Klasse" (die nach (β) eindeutig bestimmt ist), deren Elemente gerade die Mengen sind. Für diese Klasse führen wir den Term $\mathcal{V}$ ein. Es gilt:

$$\hat{A} \vdash \bigwedge_{\xi}\left(\xi\in\mathcal{V}\Longleftrightarrow\mathfrak{M}(\xi)\right).$$

Ersetzt man nun in den Axiomen aus $\hat{A}$, $\mathfrak{M}(\xi)$ stets durch $\xi\in\mathcal{V}$ (wie dies bei LÉVY [25] gefordert wird), so erhält man eine Ausdrucksmenge, die mit $\mathbf{A}$ bezeichnet wird. $\mathcal{L}_A$ sei die formale Sprache über den primitiven Formeln $\xi = \eta$, $\xi\in\eta$ und $\xi\in\mathcal{V}$. Die Theorie $\mathcal{T}_A = \langle \mathcal{L}_A, \mathcal{P}, \mathbf{A}\rangle$ ist offenbar mit der Theorie $\mathcal{T}_{\hat{A}}$

äquivalent. Fügt man zu A das Fundierungsaxiom (in der Mengenform) der Sprache $\mathcal{L}_A$ hinzu, so erhält man die Axiomenmenge A^* (vergl. A.LÉVY [25], S.162) und damit die Erweiterung $\mathcal{T}_{A^*} = \langle \mathcal{L}_A , \mathcal{P} , A^* \rangle$ von der auf S.45 die Rede war.

Wie erwähnt, ist in $\mathcal{T}_{A^*}$ das lokale Auswahlaxiom mit dem globalen Auswahlaxiom äquivalent. Wir werden nun einen allgemeineren Satz beweisen, der uns nicht nur das Resultat von LÉVY sondern auch die Äquivalenz des lokalen und des globalen Ordnungsprinzipes beispielsweise als Korollar liefert.

(4.6) Meta-Theorem: *Sei* $\Phi(\xi,\eta,\zeta)$ *ein Ausdruck aus* $\mathcal{L}_A$ *mit genau drei freien Variablen:* ξ,η,ζ *, in dem keine Individuenkonstanten vorkommen und für den gilt:*

(i) $$A^* \vdash \bigwedge_{\nu}\bigwedge_{\xi}\bigwedge_{\eta}\big[(\mathfrak{Comp}(\xi) \wedge \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}) \wedge \nu \in \xi) \Longrightarrow \Phi(\nu,\eta,\mathcal{U})\big] ,$$

(ii) $$A^* \vdash \bigwedge_{\beta}\Big[\Big(\beta \text{ Limeszahl} \wedge \bigvee_{\eta}\bigwedge_{\xi\in\Re(\beta)} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U})\Big) \Longrightarrow \bigvee_{\eta}\bigwedge_{\xi\in\Re(\beta)} \Phi(\xi,\eta,\Re(\beta))\Big] ,$$

dann sind $\bigwedge_{\xi\in\mathcal{U}} \bigvee_{\eta} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U})$ *und* $\bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi\in\mathcal{U}} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U})$ *in* A^* *einander äquivalent.*

Beweis: (I): $\bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi\in\mathcal{U}} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}) \Longrightarrow \bigwedge_{\xi\in\mathcal{U}} \bigvee_{\eta} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U})$ ist eine prädikatenlogisch gültige Formel, sie gilt also auch in A^* .

(II): Umkehrung: Wir müssen

$$A^* \vdash \Big(\neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi \in \mathcal{U}} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}) \Longrightarrow \neg \bigwedge_{\xi \in \mathcal{U}} \bigvee_{\eta} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U})\Big)$$

zeigen. Sei $A^{**} = A^* \cup \{\neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi} (\xi \in \mathcal{U} \Rightarrow \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}))\}$;

Wir haben also:

$$(\times) \qquad A^{**} \vdash \bigvee_{\xi} (\xi \in \mathcal{U} \wedge \neg \bigvee_{\eta} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}))$$

zu zeigen. Der Ausdruck $\Psi(\xi) = \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\zeta} (\zeta \in \mathcal{U} \Rightarrow \Phi(\zeta,\eta,\xi))$ hat genau die eine freie Variable ξ. Ersetzt man in Ψ, ξ durch den Term $\mathcal{U}$, dann ist $\neg \Psi(\xi/\mathcal{U}) = \neg \Psi(\mathcal{U})$ ein Axiom von A^{**} und damit auch ableitbar:

$$(\times\times) \qquad A^{**} \vdash \neg \Psi(\xi/\mathcal{U})$$

Nimmt man nun $\neg \Psi(\mathcal{U})$ für $\varphi(\mathcal{U})$ in *Theorem* 5 von LÉVY [25], S.162, so folgt aus $(\times\times)$ unter Verwendung des **modus ponens**:

$$(+) \quad A^{**} \vdash \bigvee_{\beta} [\beta \textit{ Limeszahl} \wedge \neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi \in \mathcal{U}} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{R}(\beta))]$$

Durch Kontraposition erhält man aus (*ii*):

$$A^* \vdash \bigwedge_{\beta} [(\beta \textit{ Limeszahl} \wedge \neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi \in \mathcal{U}} \Phi(\xi,\eta,\mathcal{R}(\beta))) \Longrightarrow \neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\xi} (\xi \in \mathcal{R}(\beta) \Rightarrow \Phi(\xi,\eta,\mathcal{U}))]$$

Aus dieser Beziehung und der Beziehung (+) folgt nun (vergl.Regel 1(b) in MENDELSON [28],S.62):

$$(++) \quad A^{**} \vdash \bigvee_{\beta} [\beta \textit{ Limeszahl} \wedge \neg \bigvee_{\eta} \bigwedge_{\nu} (\nu \in \mathcal{R}(\beta) \Rightarrow \Phi(\zeta,\eta,\mathcal{U}))]$$

Eine prädikatenlogische Umformung von (*i*) ergibt (vergl. MENDELSON [28],S.70,Prop.2.18(c)):

$$A^* \vdash \bigwedge_{\nu} \bigwedge_{\beta} [(\beta \textit{ Limeszahl} \wedge \nu \in \mathcal{R}(\beta)) \Longrightarrow \Longrightarrow \bigwedge_{\eta} (\neg \Phi(\nu,\eta,\mathcal{U}) \Longrightarrow \neg \Phi(\mathcal{R}(\beta),\eta,\mathcal{U}))] \ ,$$

wobei wir $A^* \vdash \bigwedge_\beta [\beta \text{ Limeszahl} \Longrightarrow \mathfrak{Comp}(\Re(\beta))]$ verwendet haben (zur Def. von $\Re(\beta)$ siehe LÉVY [25], S.161, zur Def. des Prädikates $\mathfrak{Comp}$ siehe GÖDEL [13], S.23). Nach (++) gilt daher:

$$(o) \quad A^{**} \vdash \bigvee_\beta [\beta \text{ Limeszahl} \wedge \bigwedge_\eta \bigvee_\nu (\nu \in \Re(\beta) \wedge \neg \Phi(\Re(\beta), \eta, \mathcal{V}))]$$

Da ν in $\Phi(\Re(\beta), \eta, \mathcal{V})$ keine freie Variable ist, kann in (o) der zweite Existenzquantor fortgelassen werden. Mit $\xi = \Re(\beta)$ haben wir wegen $\Re(\beta) \in \mathcal{V}$ (x) bewiesen. Dies vollendet den Beweis von (4.6). □

Wir definieren den Begriff der vollgeordneten Klasse oder *Kette:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Kette}(\xi, \rho) \rightleftharpoons \Big[& \xi \neq \emptyset \wedge \rho \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V} \wedge \bigwedge_\eta (\eta \in \xi \Longrightarrow \langle \eta, \eta \rangle \in \rho) \wedge \\ & \wedge \bigwedge_{\eta_1 \in \xi} \bigwedge_{\eta_2 \in \xi} \big[(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in \rho \wedge \langle \eta_2, \eta_1 \rangle \in \rho) \Longrightarrow \eta_1 = \eta_2 \big] \wedge \\ & \wedge \bigwedge_{\eta_1 \in \xi} \bigwedge_{\eta_2 \in \xi} \bigwedge_{\eta_3 \in \xi} \big[(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in \rho \wedge \langle \eta_2, \eta_3 \rangle \in \rho) \Longrightarrow \langle \eta_1, \eta_3 \rangle \in \rho \big] \wedge \\ & \wedge \bigwedge_{\eta_1 \in \xi} \bigwedge_{\eta_2 \in \xi} \big[\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in \rho \vee \langle \eta_2, \eta_1 \rangle \in \rho \big] \Big].\end{aligned}$$

Sei $\Phi(\xi) \rightleftharpoons \mathfrak{M}(\xi) \wedge \xi \neq \emptyset$ und $\Psi(\xi, \rho) \rightleftharpoons \mathfrak{M}(\xi) \wedge \mathfrak{M}(\rho) \wedge \mathfrak{Kette}(\xi, \rho)$ dann ist $(M\text{-}\Phi, \Psi) \rightleftharpoons (M\text{-}Ord)$ die Mengenform des *Ordnungstheorems* („*Jede nichtleere Menge kann vollgeordnet werden*"). $(Gl\text{-}\Phi, \Psi) \rightleftharpoons (Gl\text{-}Ord)$ ist die globale Form („*Zu jeder Klasse K von nichtleeren Mengen existiert eine Funktion F, die jedem $x \in K$ eine Vollordnungsrelation von x zuordnet*") und $(Univ\text{-}\Phi, \Psi)$ $(Univ\text{-}Ord)$ die universelle Form („*Es existiert eine Funktion F, die jeder nichtleeren Menge x eine Vollordnungsrelation F'x von x zuordnet*"). Offensichtlich gilt:

$$A \vdash (M\text{-}Ord) \Longleftrightarrow \bigwedge_{\xi} \bigvee_{\rho} \left[(\xi \in \mathfrak{V} \wedge \xi \neq \emptyset) \Rightarrow \mathfrak{Kette}(\xi, \rho) \right],$$

und

$$A \vdash (Univ\text{-}Ord) \Longleftrightarrow \bigvee_{\rho} \bigwedge_{\xi} \left[(\xi \in \mathfrak{V} \wedge \xi \neq \emptyset) \Rightarrow \mathfrak{Kette}(\xi, \rho) \right].$$

Da bei transitiven Klassen (complete classes bei GÖDEL [13],S.23,Def.6.5) Elemente immer Teilmengen sind, sind Elemente vollgeordneter, transitiver Mengen ebenfalls vollgeordnet; daher ist für den Ausdruck:

$$\theta(\xi, \eta, \zeta) \rightleftharpoons \left[(\xi \in \zeta \wedge \xi \neq \emptyset) \Rightarrow \mathfrak{Kette}(\xi, \eta) \right]$$

Bedingung (*i*) von Satz (4.6) erfüllt - (*ii*) ist hier trivialerweise erfüllt. Aus (4.6) erhalten wir also das folgende Korollar:

(4.7) Korollar: *In der ACKERMANNschen Mengenlehre* $\mathcal{C}_{A^*}$ *sind das lokale und das globale Ordnungstheorem einander äquivalent:*

$$A^* \vdash (Lok\text{-}Ord) \Longleftrightarrow (Gl\text{-}Ord).$$

Die Äquivalenz $(M\text{-}Ord) \Longleftrightarrow (Lok\text{-}Ord)$ ist trivial. Eine ähnliche Analyse für das Ordnungserweiterungstheorem (*„Zu jeder teilgeordneten Menge* ξ *mit der Teilordnungsrelation* ρ_1 *existiert eine Relation* ρ_2*, so daß* $\rho_1 \subseteq \rho_2$ *gilt und* ξ *bezüglich* ρ_2 *vollgeordnet ist"*) liefert uns:

(4.8) Korollar: *In der ACKERMANNschen Mengenlehre* $\mathcal{C}_{A^*}$ *sind das lokale und das globale Ordnungserweiterungstheorem einander äquivalent:*

$$A^* \vdash (Lok\text{-}Ord.Erw.) \Longleftrightarrow (Gl\text{-}Ord.Erw.).$$

Aus Satz (4.6) ergibt sich ferner das Resultat von A.LÉVY [25], Theorem 5 (*d*), daß in A^* das lokale und das globale Auswahlaxiom einander äquivalent sind: $A^* \vdash (AC) \Longleftrightarrow (E)$.

Wir verlassen nun die ACKERMANNsche Mengenlehre und führen unsere Untersuchungen in der *NBG*-Mengenlehre fort.

(4.9) Meta-Theorem: *Seien* $\Phi(x_1,..,x_n)$ *und* $\Psi(x_1,..,x_{n+1})$ *Ausdrücke aus* $\mathcal{L}'$ *mit genau n bzw. n+1 freien Variablen; dann gilt:(sofern* Ψ *eine pAF ist):*

$$\Sigma \cup \{(AC)\} \vdash (M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi,\Psi)$$

$$\Sigma \cup \{(E)\} \vdash (M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Gl\text{-}\Phi,\Psi) .$$

Beweis: Sei x eine Menge von n-tupeln $\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$ derart, daß für alle $\langle u_1,..,u_n\rangle \in x$ gilt $\Phi(u_1,..,u_n)$ Für $y \in x$ und $\alpha \in On$ sei:

$$w(y,\alpha) = \{\, u_{n+1} \;;\; \Psi(pr_1(y),..,pr_n(y),u_{n+1}) \wedge u_{n+1} \in p_\alpha \}$$

Dabei sind die p_α die v.NEUMANNschen Stufen, die induktiv wie folgt definiert werden: $p_o = \{\emptyset\}$, $p_\alpha = \mathcal{P}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta\right)$. Bekanntlich gilt:

$$\Sigma^o \vdash (D) \Longleftrightarrow \left(\mathcal{V} = \bigcup_\alpha p_\alpha\right)$$

Wird $(M\text{-}\Phi,\Psi)$ angenommen, so existiert zu jedem $y \in x$ eine Ordinalzahl $\alpha \in On$, so daß $w(y,\alpha) \neq \emptyset$ ist. Sei $\alpha(y) = Min\{\, \alpha \;;\; w(y,\alpha) \neq \emptyset \,\}$. Da $w(y,\alpha) \subseteq p_\alpha$ gilt, sind die $w(y,\alpha(y))$ Mengen und

und nach dem Ersetzungsaxiom (C 4) ist mit x auch $\{ w(y, \alpha(y)) \; ; \; y \in x \}$ eine Menge, welche mit z bezeichnet sei. Aus (AC) folgt die Existenz einer Auswahlfunktion g, welche auf z definiert ist. Setze $f = \{ \langle g`w(y, \alpha(y)) , y \rangle \; ; \; y \in x \}$; die Funktion f erfüllt Ψ, d.h. es gilt:

$$\mathfrak{Fnc}(f) \wedge x = pr_2(f) \wedge \bigwedge_y (y \in x \Rightarrow \Psi(pr_1(y), .., pr_n(y), f`y)).$$

Damit ist die erste Behauptung von (4.9) bewiesen. Die zweite Behauptung kann analog bewiesen werden. □

Bemerkung: Ohne (D) können wir (4.9) nicht beweisen, da nach $(M\text{-}\Phi, \Psi)$ für $y \in x$ zwar

$$W(y) = \{ u_{n+1} \; ; \; \Psi(pr_1(y), .., pr_n(y), u_{n+1}) \}$$

nicht leer ist, aber eine echte Klasse sein kann, weshalb auf die „Gesamtheit" der $W(y)$ (AC) nicht anwendbar zu sein braucht.

Durch Anwendung des modus ponens erhält man aus (4.9) sofort:

(4.10) Korollar: *Wenn* $\Sigma \cup \{(AC)\} \vdash (M\text{-}\Phi, \Psi)$, *so auch:* $\Sigma \cup \{(AC)\} \vdash (Lok\text{-}\Phi, \Psi)$, *falls* Ψ *eine pAF ist.*

(4.11) Korollar: *Wenn* $\Sigma \vdash (M\text{-}\Phi, \Psi) \Rightarrow (M\text{-}\Phi', \Psi')$, *für Paare* $\langle \Phi, \Psi \rangle$ *mit n bzw. n+1 und* $\langle \Phi', \Psi' \rangle$ *mit m bzw. m+1 freien Variablen aus* $\mathcal{L}'$, *so auch:* $\Sigma \cup \{(AC)\} \vdash (Lok\text{-}\Phi, \Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi', \Psi')$, *sofern* Ψ *eine pAF ist.*

Dabei ergibt sich (4.11) sofort aus (4.4) und (4.9): $\Sigma \cup \{(AC)\} \vdash (Lok\text{-}\Phi, \Psi) \Rightarrow (M\text{-}\Phi, \Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi', \Psi') \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi', \Psi')$.

Wir beweisen noch die folgende Verschärfung von (4.11): falls Terme $t_1,..,t_{n+1}$ existieren, die den unten aufgeführten Bedingungen (+) und (++) genügen, dann ist, falls $(M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi',\Psi')$ in Σ beweisbar ist, auch $(Lok\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi',\Psi')$ in Σ (also ohne Zuhilfenahme von (AC)!) beweisbar; ferner braucht Ψ keine *pAF* (*ppf* bei GÖDEL [13], S.8) zu sein.

(4.12) Meta-Theorem: *Seien* $\Phi(x_1,..,x_n)$ *und* $\Psi(x_1,..,x_{n+1})$ *Ausdrücke aus* $\mathcal{L}'$ *mit genau n bzw. n+1 freien Variablen und* $\Phi'(x_1,..,x_m)$ *und* $\Psi'(x_1,..,x_{m+1})$ *aus* $\mathcal{L}'$ *mit genau m bzw. m+1 freien Variablen. Falls:* $\Sigma \vdash (M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi',\Psi')$ *und*

(+) $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1}\cdots\bigwedge_{x_m}\left[\Phi'(x_1,..,x_m) \Longrightarrow \Phi(t_1,..,t_n)\right]$

(++) $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1}\cdots\bigwedge_{x_m}\bigwedge_{z}\left[\left(\Phi'(x_1,..,x_m)\wedge\Psi(t_1,..,t_n,z)\right) \Longrightarrow \Psi'(x_1,..,x_m,\ t_{n+1})\right]$

für bestimmte Terme $t_1 = t_1(x_1,...,x_m)$,..... $t_n = t_n(x_1,..,x_m)$ *und* $t_{n+1} = t_{n+1}(x_1,..,x_m,z)$ *mit* $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1}\cdots\bigwedge_{x_m}\mathfrak{M}(t_i)$ $(i = 1,..,m)$ *und* $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1}\cdots\bigwedge_{x_m}\bigwedge_{z}\mathfrak{M}(t_{n+1})$, *dann gilt auch:*

$\Sigma \vdash (Lok\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Lok\text{-}\Phi',\Psi')$.

Beweis: Sei x eine Menge von m-tupeln $\langle u_1,...,u_m\rangle$ derart, daß für alle $y \in x$ gilt: $\Phi'(pr_1(y),..,pr_m(y))$. Nach Voraussetzung (+) existieren Terme $t_1,..,t_n$, so

daß für alle $y \in x$ gilt:

$$\Sigma \vdash \bigwedge_{y \in x} \Big[\Phi'(pr_1(y),..,pr_m(y)) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\big(t_1(pr_1(y),..,pr_m(y)), \ldots, t_n(pr_1(y),..,pr_m(y))\big)\Big].$$

Zur Menge $\bar{x} = \{ \langle t_1(pr_1(y),..,pr_m(y)), \ldots$

$\ldots, t_n(pr_1(y),..,pr_m(y))\rangle \; ; \; y \in x \}$ existiert nach der Annahme von $(Lok\text{-}\Phi,\Psi)$ und nach (+) eine Funktion $\bar{f}$, so daß $pr_2(\bar{f}) = \bar{x}$ und:

$$\bigwedge_{\bar{y} \in \bar{x}} \big[\Psi(pr_1(\bar{y}),..,pr_n(\bar{y}), \bar{f}`\bar{y}) \big]$$

gilt. Nach Voraussetzung $\Longleftarrow$ existiert ferner ein Term t_{n+1} derart, daß (++) erfüllt ist. Die Funktion $f = \{ \langle t_{n+1}(pr_1(y),..,pr_m(y), \bar{f}`(\langle t_1,..,t_n\rangle)), y\rangle ; y \in x \}$ ist eine Funktion, welche $(Lok\text{-}\Phi',\Psi')$ erfüllt. Ausführlich aufgeschrieben lautet f :

$$f = \{ \langle t_{n+1}(pr_1(y),..,pr_m(y), \bar{f}`(\langle t_1(pr_1(y),\ldots$$

$$..,pr_m(y)),.., t_n(pr_1(y),..,pr_m(y))\rangle), y\rangle ; y \in x \}$$

Dies vollendet den Beweis von (4.12).

(4.13) Wir bemerken noch, daß der Satz (4.12) nicht nur für das Axiomensystem Σ gilt, sondern auch für Σ^0. (4.12) bleibt richtig, wenn man an allen Stellen des Vorkommens Σ durch Σ^0 ersetzt.

(4.14) Korollar: *Unter den Voraussetzungen von* (4.12)

folgt aus $\Sigma \vdash (M\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (M\text{-}\Phi',\Psi')$

auch $\Sigma \vdash (Gl\text{-}\Phi,\Psi) \Longrightarrow (Gl\text{-}\Phi',\Psi')$.

§ 5 : Bemerkungen zum Konfinalitätsprinzip

In seiner einfachsten Form, der Mengenform, lautet das Konfinalitätsprinzip:

(*M- Konf*) $\rightleftharpoons$ *„Jede vollgeordnete Menge besitzt wohlgeordnete konfinale Teilmengen".*

Wir erinnern daran, daß in einer teilgeordneten Menge $\langle x, \leqq \rangle$ eine Teilmenge $z \subseteq x$ *konfinal in* x genannt wird, falls z mit jedem Hauptende $[v, \rightarrow [$ von x nichtleeren Durchschnitt hat, oder äquivalent ausgedrückt, falls zu jedem $y \in x$ ein $u \in z$ existiert mit $y \leqq u$.

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein, die wir, da sie wohlbekannt sind, nicht in $\mathfrak{L}'$ geben, sondern der Kürze halber umgangssprachlich. $\mathfrak{Kette}(x,r)$ $\rightleftharpoons$ $r \subseteq \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \wedge x$ ist bezüglich r vollgeordnete(totalgeordnete) Menge(= Kette); $\mathfrak{Wohlord}(x,r) \rightleftharpoons r \subseteq \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \wedge$ x ist bezüglich r eine wohlgeordnete Menge; $\mathfrak{Konf}(x,y,r)$ $\rightleftharpoons$ $r \subseteq (y \times y) \wedge x \subseteq y \wedge \langle x,r \rangle$ und $\langle y,r \rangle$ sind teilgeordnete Mengen $\wedge$ x ist (bezüglich r) eine konfinale Teilmenge von y.

Sei $\Psi(x,r,y) \rightleftharpoons \mathfrak{Wohlord}(y,r) \wedge \mathfrak{Konf}(y,x,r)$ und

$\Phi(x,r) \rightleftharpoons \mathfrak{Kette}(x,r)$. Gemäß Def.(4.1) und (4.3) stellen wir die folgenden Formen des Konfinalitätsprinzipes auf:

$(M\text{- } Konf) \rightleftharpoons (M\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons \bigwedge_x \bigwedge_r \left[\mathfrak{Kette}(x,r) \Rightarrow \bigvee_y \left(\mathfrak{Wohlord}(y,r) \wedge \mathfrak{Konf}(y,x,r) \right) \right]$$

„Jede Kette besitzt wohlgeordnete konf. Teilmengen"

$(Lok\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons (Lok\text{- } Konf) \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons \bigwedge_x \left[\bigwedge_y \left(y \in x \Rightarrow \bigvee_{u_1} \bigvee_{u_2} \left(y = \langle u_1, u_2 \rangle \wedge \mathfrak{Kette}(u_1,u_2) \right) \right) \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \bigvee_f \left(\mathfrak{Fnc}(f) \wedge x = pr_2(f) \wedge \bigwedge_{y \in x} \left(\mathfrak{Wohlord}(f`y, pr_2(y)) \wedge \right. \right.$$

$$\left. \left. \wedge \mathfrak{Konf}(f`y,\ pr_1(y),\ pr_2(y)) \right) \right) \Big] ,$$

„Zu jeder Menge x von vollgeordneten Mengen $\langle u_1,u_2\rangle$ existiert eine Funktion f mit $pr_2(f) = x$, die jedem $\langle u_1,u_2\rangle$ eine bezügl. u_2 wohlgeordnete konfinale Teilmenge zuordnet".

Es ist klar, wie die übrigen Formen $(Cls\text{-}\Phi,\Psi)$, $(Gl\text{-}\Phi,\Psi)$ und $(Univ\text{-}\Phi,\Psi)$ lauten; wir kürzen sie mit $(Cls\text{- } Konf)$, $(Gl\text{- } Konf)$ bzw. $(Univ\text{- } Konf)$ ab.

In [12], S.178, haben wir: $\Sigma \vdash (AC) \Longleftrightarrow (Lok\text{-}Konf)$ bewiesen. Es stellte sich die Frage, ob nicht schon $(M\text{- } Konf)$ mit (AC) äquivalent ist. Diese Frage soll uns im Folgenden beschäftigen. Zunächst behaupten wir jedoch den folgenden Satz:

(5.1) Satz: *Das globale Konfinalitätsprinzip ist im System Σ mit dem globalen Auswahlaxiom äquivalent:* $\Sigma \vdash (E) \Longleftrightarrow (Gl\text{- } Konf)$.

Beweis: (I) wir zeigen: $\Sigma^{0} \vdash (E) \Longrightarrow (Gl\text{-}Konf)$:
Sei F eine auf $\mathfrak{V} \setminus \{\varnothing\}$ definierte Auswahlfunktion. Mittels F ist dann für jede nichtleere Kette $\langle x,r\rangle$ durch transfinite Rekursion eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge definierbar.

(II) wir zeigen: $\Sigma \vdash (Gl\text{-}Konf) \Longrightarrow (E)$:
Sei F eine Funktion, die jeder Kette $\langle k,r\rangle$ eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge $F'(\langle k,r\rangle)$ zuordnet. Setze $H = \{ \langle Min_r(F'(\langle k,r\rangle)) , \langle k,r\rangle\rangle ; Kette(k,r) \}$. wobei $Min_r(F'(\langle k,r\rangle))$ das kleinste Element von $F'(\langle k,r\rangle) \subseteq k$ ist bezüglich der Wohlordnungsrelation $r \cap (F'(\langle k,r\rangle) \times F'(\langle k,r\rangle))$. H ist eine Funktion, die jeder vollgeordneten Menge eines ihrer Elemente zuordnet. Um nun eine Funktion R zu definieren, die jeder vollgeordneten Menge eine Wohlordnung zuordnet, folgen wir einer Arbeit von DEVIDÉ [7]:

Sei $\langle k,r\rangle$ eine Kette. Für $z \in \mathcal{P}(k) \setminus \{\varnothing\}$ definiere den Term: $z^{*} = z \setminus \{ H'z \}$. Für $u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$ definiere einen Term:

$$t_1(u) = \{ \bigcap_{a \in v} a ; \varnothing \neq v \subseteq u \} \cup \{ z^{*} ; \varnothing \neq z \in u \}$$

und setze $t_2(H,k) = f_k = \{ \langle t_1(u) , u\rangle ; u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(k)) \}$. Der Term f_k (der von H und k abhängt) ist eine Funktion von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$. Definiere einen weiteren Term t_3 durch:

$$t_3(z, k, H) = \bigcap \{ u ; u \supseteq \{z\} \cup f_k{}'u \}$$

und setze $g_k = \{ \langle t_3(z,k,H) , z\rangle ; z \in \mathcal{P}(k) \}$.
g_k ist ein Term t_4, der von k und H abhängt und eine Funktion von $\mathcal{P}(k)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$. Definiere schließlich

noch einen Term t_4 durch:

$$t_4(x,k,H) = \bigcap \{ z \; ; \; z \in t_3(k,k,H) \wedge x \in z \}$$

und damit eine Funktion h_k von k in $\mathcal{P}(k)$ durch:

$$h_k = \{ \langle t_4(x,k,H) \, , \, x \rangle \; ; \; x \in k \}.$$

h_k selber ist ein Term $t_5 = t_5(k,H)$. DEVIDÉ zeigte in [7], daß die Terme f_k , g_k und h_k Funktionen sind und daß die Relation:

$$r_k = \{ \langle x_1, x_2 \rangle \; ; \; x_1, \; x_2 \in k \wedge h_k{}'x_2 \subseteq h_k{}'x_1 \}$$

eine auf k definierte Wohlordnungsrelation ist. (Zum Verständnis des DEVIDÉschen Beweises siehe [8] und [9]). Setze nun:

$$R = \{ \langle r_k \, , \, k \rangle \; ; \; \text{Kette}(k,r) \}$$

so ist R die gesuchte Funktion, die jeder Kette $\langle k,r \rangle$ eine Wohlordnung $R'(\langle k,r \rangle) = r_k$ zuordnet (H ist ein Term, der von k, r und F abhängt und daher ist auch r_k ein Term t_6 , der von k, r und F abhängt).

Ist w eine auf s definierte Wohlordnung, so ist $t_7(s,w) = \overline{w} = \{ \langle a,b \rangle \; ; \; Min_w((a \cup b) \setminus (b \cap a)) \in b \}$ eine auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(s)$ definierte Vollordnungsrelation; $R'(\langle \mathcal{P}(s), \; t_7(s,w) \rangle) = t_8(s,w,F)$ ist dann eine auf $\mathcal{P}(s)$ erklärte Wohlordnungsrelation. Unter Verwendung der Funktion R und der Tatsache, daß $\alpha \leq \beta \Longrightarrow p_\alpha \subseteq p_\beta \quad (\forall \, \alpha,\beta \in On)$ gilt, kann nun mittels transfiniter Rekursion jeder v.NEUMANNschen Stufe p_α (vergl.S.51) eine auf p_α definierte Wohlordnung w_α zugeordnet werden (solche Konstruktionen sind bekannt). Da $\mathfrak{E}$ eine Wohlordnungsrelation von On ist, ist

$S = \{\langle x_1, x_2\rangle \,;\, \varrho(x_1) < \varrho(x_2) \vee [\varrho(x_1) = \varrho(x_2) \wedge \langle x_1, x_2\rangle \in w_{\varrho(x_1)}]\}$ eine Wohlordnung von $\mathfrak{U}$ ($\varrho(x)$ ist der Rang von x , d.h. das kleinste α derart, daß $x \in p_\alpha$ gilt). Nun folgt (E) sofort ! □

Sei $\Phi(x) \rightleftharpoons \bigvee_r \mathfrak{Kette}(x,r)$ und $\Psi(x,w) = \mathfrak{Wohlord}(x,w)$, dann ist:

$(M\text{-}\Phi,\Psi) \rightleftharpoons (M\text{-}Wohl.K) \rightleftharpoons \bigwedge_x [\bigvee_r \mathfrak{Kette}(x,r) \Rightarrow \bigvee_w \mathfrak{Wohlord}(x,w)]$ die Mengenform des Wohlordnungssatzes für Ketten: *„Jede Kette kann wohlgeordnet werden".*

*H.*RUBIN hat in [38] gezeigt, daß *(M- Wohl.K)* im System Σ mit dem lokalen Auswahlaxiom (AC) äquivalent ist - beim Beweis wird das Fundierungsaxiom (D) wesentlich benutzt (vergl.auch H.und J.E.RUBIN [37],S.77-78). Nach [37],S.107, ist die Klassenform des Wohlordnungssatzes für Ketten (*(Cls-Wohl.K)* $\rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons$ *„Jede vollgeordnete Klasse kann wohlgeordnet werden")* mit dem globalen Auswahlaxiom (E) äquivalent: $\Sigma \vdash (E) \Longleftrightarrow (Cls\text{-}Wohl.K)$. Dem Beweis von (5.1) entnehmen wir, daß auch die universelle Form (und nach (4.2) auch die globale Form *(Gl-Wohl.K)*) des Wohlordnungssatzes für Ketten mit (E) äquivalent sind. Es gilt also:

(5.2) Korollar: *In* Σ *sind die Klassenform, die globale und die universelle Form des Wohlordnungssatzes für Ketten einander äquivalent und mit mit dem globalen Auswahlaxiom gleichwertig.*

Wir bemerken noch, daß wir, sobald wir (in $\mathfrak{r}^0$) (*M- Konf*) $\Longleftrightarrow$ (*M- Wohl.K.*) bewiesen haben werden, unter Verwendung von (4.14) und (5.2) einen zweiten Beweis für (5.1) erhalten können.

Um (*M- Konf*) $\Longleftrightarrow$ (*M- Wohl.K.*) beweisen zu können, müssen wir vorher zeigen, daß der Ordnungserweiterungssatz, auf die Klasse der *Wälder* eingeschränkt, aus der Ordnungstheorem folgt. Wir werden einen allgemeineren Satz beweisen, nämlich, daß der Ordnungserweiterungssatz, auf die Klasse der *verästelten Mengen* eingeschränkt, aus dem Ordnungstheorem folgt.

(5.3) Definition: Eine teilgeordnete Menge $\langle m, \leqq \rangle$ heißt *verästelt*, wenn alle Hauptanfänge in m : $]\leftarrow, x] = \{ y ; y \in m \wedge y \leqq x \}$ (bezüglich $\leqq$) vollgeordnet sind. $\langle m, \leqq \rangle$ heißt ein *Wald*, wenn alle Hauptanfänge von m wohlgeordnet sind. Ein Wald, der nach unten gerichtet ist (d.h. zu jedem $a \in m$ und jedem $b \in m$ existiert ein $c \in m$ mit $a \geqq c$ und $b \geqq c$), wird *Baum* genannt.

Wir geben das Ordnungstheorem, den Ordnungserweiterungssatz und das in diesem Zusammenhang interessante Primidealtheorem in den Mengenformen an:

(*M-Ord*): Mengenform des Ordnungstheorems: *Jede Menge kann vollgeordnet werden.*

(*M- Ord.Erw.*): Mengenform des Ordnungserweiterungstheorems: *Zu jeder Menge x und jeder Teilordnung r von x existiert eine Vollord-*

nungsrelation r' *mit* $r \subseteq r'$ *, welche* x *voll-ordnet.*

(*M- B.P.I.*) Mengenform des Primidealtheorems für Boolesche Algebren: *Jede Boolesche Algebra (mit* $0 \neq 1$ *) besitzt Primideale.*

Es gelten die folgenden Implikationen:

$\Sigma^0 \vdash (AC) \Rightarrow (M\text{-}B.P.I.) \Rightarrow (M\text{- }Ord.Erw.) \Rightarrow (M\text{- }Ord.)$.

Dabei wurde $\Sigma^0 \vdash (M\text{- }B.P.I.) \Rightarrow (M\text{- }Ord.Erw.)$ zuerst von L.HENKIN (via Kompaktheitssatz) in [22] bewiesen (vergl. HENKIN [21]). J.D.HALPERN hat in seiner Dissertation [17] gezeigt, daß $(M\text{-}B.P.I.) \Rightarrow (AC)$ in Σ^0 nicht beweisbar ist, vorausgesetzt Σ^0 ist widerspruchsfrei (siehe auch HALPERN [18]). A.TARSKI hat bemerkt, daß in Σ^0 $(M\text{- }B.P.I.)$ mit $(Lok\text{-}B.P.I.)$ äquivalent ist (siehe [18], Fußnote (1)). In [18] hat HALPERN ferner gezeigt, daß auch $(Univ\text{- }B.P.I.) \Rightarrow (AC)$ in Σ^0 nicht beweisbar ist. J.D.HALPERN, H.LÄUCHLI und A.LÉVY haben gezeigt, daß $(M\text{- }B.P.I.) \Rightarrow (AC)$ auch in Σ (d.h. in Gegenwart des Fundierungsaxiomes (D)) nicht beweisbar ist (siehe HALPERN-LÄUCHLI [19]; die als Fortsetzung von [19] gedachte Arbeit von HALPERN und LÉVY ist bisher noch nicht publiziert worden). A.R.D.MATHIAS hat gezeigt, daß $(M\text{- }Ord.) \Rightarrow (M\text{- }Ord.Erw.)$ in Σ nicht beweisbar ist. (siehe MATHIAS [49]). Es ist noch offen, ob $(M\text{- }Ord.Erw.) \Rightarrow (M\text{- }B.P.I.)$ (etwa in Σ^0) beweisbar ist oder nicht.

Offensichtlich gilt $\Sigma^0 \vdash (M\text{-}Ord) \Leftrightarrow (Lok\text{-}Ord)$.

Zum Beweis der Äquivalenz der globalen Form mit der Klassenform des Ordnungstheorems wird jedoch das Fundierungsaxiom (D) benötigt:

(5.4) Lemma: $\Sigma \vdash (Cls\text{- }Ord) \Longleftrightarrow (Gl\text{- }Ord)$.

Beweis: Wir benötigen wieder die v.NEUMANNschen Stufen p_α und die MIRIMANOFFsche Rangfunktion ρ (siehe S.51 und S.59). Sei $(Gl\text{- }Ord)$ angenommen; dann gibt es eine Funktion F, die jeder Stufe p_α eine Vollordnungsrelation $r_\alpha = F`p_\alpha$ zuordnet. Setze:

$$R = \{ \langle x,y\rangle \; ; \; \rho(x) < \rho(y) \vee \big(\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x,y\rangle \in r_{\rho(x)}\big)\}.$$

R ist eine Vollordnungsrelation für die Klasse $\mathcal{V}$ aller Mengen. Ist K eine beliebige Klasse, so ist $R \cap (K \times K)$ eine Vollordnung von K; also folgt $(Cl\text{- }Ord)$ aus $(Gl\text{- }Ord)$. Die Umkehrung ist klar. □

W.B.EASTON hat in seiner Dissertation [10] gezeigt, daß $(AC) \Longrightarrow (Gl\text{- }Ord)$ in Σ nicht beweisbar ist; daher ist auch $(Lok\text{- }Ord) \Longrightarrow (Gl\text{- }Ord)$ in Σ nicht beweisbar. FEFERMAN [11] bewies $\Sigma \not\vdash (M\text{-}Ord)$.

(5.5) Satz: *In* $\Sigma^0 \cup \{(M\text{- }Ord)\}$ *gilt: Wenn* $\langle m, \leqq \rangle$ *eine verästelte Menge ist und*

$$g = \{ \langle x,y\rangle \; ; \; x,y \in m \wedge x \leqq y \}$$

der Graph von $\leqq$, *dann existiert eine Relation* r *mit* $g \subseteq r$, *so daß* m *bezüglich* r *vollgeordnet ist.*

Beweis: Sei $\langle m, \leqq \rangle$ eine verästelte Menge und g der

Graph von $\leqq$. Ist $x \in m$ und a ein Anfangsstück von $]\leftarrow, x]$ (d.h. $\bigwedge_u \bigwedge_v [(u \in a \wedge v \in]\leftarrow, x] \wedge v \leqq u) \Rightarrow v \in a]$) mit $a \subset]\leftarrow, x]$ (echte Inklusion!), so sei:

$$[x]_a = \{ y \; ; \; y \in m \wedge a \subset]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, y] \}.$$

Wir wollen $[x]_a$ die *„Garbe von x über a"* nennen, da $[x]_a$ die Menge aller $y \in m$ ist, die in Ästen (oder Halmen) liegen, die sich vom Ast $]\leftarrow, x]$ erst echt oberhalb von a abzweigen. Stets gilt $x \in [x]_a$.

(5.6) Hilfssatz 1: *Ist a ein echtes Anfangsstück von $]\leftarrow, x]$ und gilt $y \in [x]_a$, so ist $[x]_a = [y]_a$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst $[x]_a \subseteq [y]_a$: sei also $u \in [x]_a$; d.h. definitionsgemäß: $a \subset]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, u]$. Es sind $]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, y]$ und $]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, u]$ Anfangsstücke von $]\leftarrow, x]$. Setze:

$$f(x,y) =]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, y] .$$

Da $\langle m, \leqq \rangle$ verästelt ist, ist $]\leftarrow, x]$ vollgeordnet und daher auch die Menge aller Anfangsstücke von $]\leftarrow, x]$. Es gilt also entweder $f(x,y) \subseteq f(x,u)$ oder : $f(x,u) \subseteq f(x,y)$.

Im 1.Fall gilt: $a \subset f(x,y) \subseteq f(x,u)$. Schneidet man jede dieser drei Ketten mit $]\leftarrow, y]$, so folgt: $a \subset f(x,y) = f(x,y) \cap]\leftarrow, y] \subseteq f(x,u) \cap]\leftarrow, y]$. Es ist:

$$\begin{aligned} f(x,u) \cap]\leftarrow, y] &=]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, u] \cap]\leftarrow, y] \\ &=]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, u] \cap]\leftarrow, u] \cap]\leftarrow, y] \\ &=]\leftarrow, u] \cap]\leftarrow, y] = f(u,y) = f(y,u) , \end{aligned}$$

da $]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,y] = f(x,y) \subseteq f(x,u) =]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,u]$.

Daher haben wir insgesamt:

$a \subset f(x,y) \subseteq f(y,u)$, also $a \subset f(y,u)$ und das heißt $u \in [y]_a$. Damit ist $[x]_a \subseteq [y]_a$ gezeigt.

Im 2.Fall schließen wir so:

$u \in [x]_a \Rightarrow a \subset f(x,u)$, wobei $f(x,u) = f(x,u) \cap$ $\cap f(x,y)$, weil $f(x,u) \subseteq f(x,y)$ angenommen worden war. Aber:

$$\begin{aligned} a \subset f(x,u) &= f(x,u) \cap f(x,y) \\ &=]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,u]\cap]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,y] \\ &=]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,u]\cap]\leftarrow,y] \\ &=]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,y]\cap]\leftarrow,y]\cap]\leftarrow,u] \\ &= f(x,y) \cap f(y,u) \subseteq f(y,u). \end{aligned}$$

Also gilt: $a \subset f(y,u)$ und somit $u \in [y]_a$. Auch im 2. Fall gilt also $[x]_a \subseteq [y]_a$.

$[x]_a \subseteq [y]_a$ haben wir oben aus den beiden Voraussetzungen, daß $a \subset]\leftarrow,x]$ und $y \in [x]_a$ gilt, geschlossen. Nun folgt aus $y \in [x]_a$ aber

$$a \subset]\leftarrow,x]\cap]\leftarrow,y] \subseteq]\leftarrow,y]$$

also $x \in [y]_a$ und $a \subset]\leftarrow,y]$. Verwenden wir jetzt diese beiden Beziehungen, so erhalten wir sofort $[y]_a \subseteq [x]_a$, wenn wir im obigen Beweis x stets durch y und y durch x ersetzen (Vertauschung der Rollen von x und y). Damit ist $[x]_a = [y]_a$ gezeigt, q.e.d.

(5.7) Hilfssatz 2: *Ist a ein echtes Anfangsstück von $]\leftarrow,x]$ und von $]\leftarrow,y]$ und gilt weiterhin $[x]_a \cap [y]_a \neq \emptyset$, so gilt $[x]_a = [y]_a$.*

Beweis: Sei $[x]_a \cap [y]_a \neq \emptyset$ und $u \in [x]_a \cap [y]_a$. Da in verästelten Mengen Hauptanfänge Ketten sind und Durchschnitte von Hauptanfängen entweder leer oder Anfangsstücke der Hauptanfänge sind, deren Durchschnitt sie sind, sind $f(x,u) = f(u,x)$ und $f(y,u) = f(u,y)$ Anfangsstücke von $]\leftarrow,u]$ (beide enthalten a). Da mit $]\leftarrow,u]$ auch die Menge aller Anfangsstücke von $]\leftarrow,u]$ vollgeordnet ist, gilt entweder $f(u,x) \subseteq f(u,y)$ oder $f(u,y) \subseteq f(u,x)$. Im ersten Falle gilt:

$$a \subset f(u,x) = f(u,x) \cap f(u,y) =]\leftarrow,u] \cap]\leftarrow,x] \cap]\leftarrow,y]$$
$$= f(x,y) \cap]\leftarrow,u] \subseteq f(x,y),$$

also $a \subset f(x,y)$ und daher $y \in [x]_a$. Im zweiten Fall folgt analog $y \in [x]_a$. Nach Hilfssatz 1 ergibt sich die Behauptung.

Wir setzen nun den Beweis von (5.5) fort: Bilde die Menge aller Garben:

$$k = \{\ [x]_a\ ;\ x \in m \wedge a \text{ ist echtes Anfangsstück von }]\leftarrow,x]\ \}\ .$$

Aus dem Ordnungstheorem (*M- Ord*) folgt die Existenz einer Vollordnungsrelation $\hat{r}$ von k . Definiere:

$$x \parallel y \underset{Df.}{\Longleftrightarrow} \neg(x \leq y \vee y \leq x)$$

und setze:

$$r = \{\ \langle x,y\rangle\ ;\ x,y \in m \wedge [\langle x,y\rangle \in g \vee (x \parallel y \wedge$$
$$\wedge \langle [x]_{f(x,y)}\ ,\ [y]_{f(x,y)}\rangle \in \hat{r})]\ \}.$$

Offensichtlich ist r eine Erweiterung von g ,d.h. $g \subseteq r$. Wir behaupten, daß r eine Vollordnungsrela-

tion auf der Menge m ist:

(i) Reflexivität: Sei $x \in m$; wegen $x \leqq x$ folgt $\langle x,x\rangle \in r$.

(ii) Antisymmetrie: Sei $\langle x,y\rangle \in r$ und $\langle y,x\rangle \in r$. Falls $x \leqq y$, so ist $x \parallel y$ unmöglich; daher kann $\langle y,x\rangle \in r$ nur gelten, wenn auch $y \leqq x$ gilt. Da aber $\leqq$ antisymmetrisch ist, folgt $x = y$.

Falls $y \leqq x$, so folgt analog $x = y$.

Falls $x \parallel y$ gilt, so können $\langle x,y\rangle$ und $\langle y,x\rangle$ in r nur dann liegen, wenn $\langle [x]_{f(x,y)}, [y]_{f(x,y)}\rangle \in \hat{r}$ und $\langle [y]_{f(x,y)}, [x]_{f(x,y)}\rangle \in \hat{r}$ gilt. Da aber $\hat{r}$ antisymmetrisch ist, folgt: $[x]_{f(x,y)} = [y]_{f(y,x)}$.

Wegen $x \in [x]_{f(x,y)}$ hätten wir somit auch $x \in [y]_{f(x,y)}$, also: $f(x,y) \subset]\leftarrow,y] \cap]\leftarrow,x] = f(y,x) = f(x,y)$, Widerspruch! $x \parallel y$ ist also keiner der möglichen Fälle.

(iii) Transitivität:

Sei $\langle x,y\rangle \in r$ und $\langle y,z\rangle \in r$. a) Falls $x \leqq y$ und $y \leqq z$, so folgt aus der Transitivität von $\leqq$ sofort $x \leqq z$ und daraus $\langle x,z\rangle \in r$.

b) Falls $x \parallel y$ und $y \leqq z$, so ist:

$f(x,y) =]\leftarrow,x] \cap]\leftarrow,y] =]\leftarrow,x] \cap]\leftarrow,y] \cap]\leftarrow,z]$ (da $y \leqq z$)

$\subseteq]\leftarrow,x] \cap]\leftarrow,z] = f(x,z)$,

Angenommen, die Inklusion $f(x,y) \subseteq f(x,z)$ wäre eine echte Inklusion, dann gäbe es *ein* $u \in f(x,z) \setminus f(x,y)$. $u \in f(x,z)$ heißt: $u \leqq x$ und $u \leqq z$. Da $\langle m, \leqq\rangle$ verästelt ist, ist $]\leftarrow,z]$ eine Kette, so daß aus $y \leqq z$ und $u \leqq z$ folgt, daß entweder $y \leqq u$ oder $u \leqq y$ gilt. Im ersten Falle ($y \leqq u$) wäre $y \leqq u \leqq x$, also $y \leqq x$ im Widerspruch zu $x \parallel y$. Im zweiten Falle ($u \leqq y$) wäre $u \in f(x,y)$ im Widerspruch zu $u \in f(x,z) \setminus f(x,y)$. Die Inklusion oben kann also nicht echt sein; d.h. es

gilt: $f(x,y) = f(x,z)$. Aus $\langle [x]_{f(x,y)}, [y]_{f(x,y)} \rangle \in \hat{r}$ folgt somit $\langle [x]_{f(x,z)}, [y]_{f(x,z)} \rangle \in \hat{r}$. Wegen $y \in [y]_{f(x,z)} \cap [z]_{f(x,z)}$ folgt nach Hilfssatz 2 daß beide Garben gleich sein müssen und daher wissen wir, daß auch $\langle [x]_{f(x,z)}, [z]_{f(x,z)} \rangle$ in $\hat{r}$ liegt. Also ist $\langle x,z \rangle \in r$.

c) Der Fall $x \leqq y$ und $y \parallel z$ ist ähnlich zu behandeln und ergibt $\langle x,z \rangle \in r$.

d) Wir betrachten den letzten Fall: $x \parallel y$ und $y \parallel z$. Wir müssen einige Unterfälle betrachten:

(a) $f(x,y) = f(y,z)$: hier folgt aus $\langle [x]_{f(x,y)}, [y]_{f(x,y)} \rangle \in \hat{r}$ und $\langle [y]_{f(y,z)}, [z]_{f(y,z)} \rangle \in \hat{r}$ sofort: $\langle [x]_{f(x,z)}, [y]_{f(x,z)} \rangle \in \hat{r}$ und $\langle [y]_{f(x,z)}, [z]_{f(x,z)} \rangle \in \hat{r}$ (weil $f(x,y) = f(y,z) \Longrightarrow f(x,y) = f(x,z)$) und aus der Transitivität von r ; $\langle [x]_{f(x,z)}, [z]_{f(x,z)} \rangle \in \hat{r}$, also $\langle x,z \rangle \in r$.

(b) $f(x,y) \subset f(y,z)$: hier gilt $z \in [y]_{f(x,y)}$ und daher nach Hilfssatz 1: $[y]_{f(x,y)} = [z]_{f(x,y)}$. Daraus und weil $f(x,y) \subset f(y,z) \Longrightarrow f(x,z) = f(x,y)$ folgt aus $\langle [x]_{f(x,y)}, [y]_{f(x,y)} \rangle \in \hat{r}$ auch $\langle [x]_{f(x,z)}, [z]_{f(x,z)} \rangle \in \hat{r}$, also $\langle x,z \rangle \in r$.

(c) Die Fälle $f(x,z) \subset f(x,y)$ und $f(x,z) = f(y,z) \subset f(x,y)$ sind ähnlich zu behandeln wie der Fall (b). Die Eigenschaft der Transitivität von $\hat{r}$ wurde nur im Fall (a) gebraucht. Da weitere Fälle nicht auftreten, ist die Transitivität von r bewiesen.

(iv) Konnexität (oder Linearität):

Falls $x \parallel y$, so gilt, da $\hat{r}$ eine Vollordnung ist, entweder $\langle [x]_{f(x,y)}, [y]_{f(x,y)} \rangle \in \hat{r}$ oder die inverse

Beziehung: $\langle [y]_{f(y,x)} , [x]_{f(y,x)} \rangle \in \hat{r}$ und somit entweder $\langle x,y \rangle \in r$ oder $\langle y,x \rangle \in r$.

Also ist r eine Vollordnungsrelation von $\langle m , \leqq \rangle$ welche $\leqq$,d.h. g , erweitert. Dies vollendet den Beweis von (5.5).

(5.8) Satz: *Im System* Σ^0 *sind äquivalent:*

(M-Konf): „Jede Kette besitzt wohlgeordnete konfinale Teilmengen" und:

(M- Wohl.K.): „Jede Kette kann wohlgeordnet werden" , also:

$$\Sigma^0 \vdash (M\text{- Wohl.K.}) \Longleftrightarrow (M\text{- Konf}).$$

Beweis: (I) Wir nehmen (*M- Konf*) an und zeigen, daß jede Menge, die eine Vollordnung besitzt, eine Wohlordnung besitzt. Sei also m eine Menge und r eine Vollordnung von m . Setze:

$$m^* = \{ \langle t,w \rangle \ ; \ \emptyset \neq t \subseteq m \wedge w \subseteq t \times t \wedge \mathfrak{Wohlord}(t,w) \}$$

(die Wohlordnungsrelationen w der Teilmengen t von m brauchen in keinerlei Beziehung mit der Vollordnung r zu stehen). Wir setzen $m \neq \emptyset$ voraus; da für $x \in m$ $\langle \{x\}, \{ \langle x,x \rangle \} \rangle \in m^*$ gilt, ist auch m^* nicht leer. In m^* wird eine Ordnungsrelation $\trianglelefteqq$ wie folgt erklärt:

$$\langle t_1,w_1 \rangle \trianglelefteqq \langle t_2,w_2 \rangle \Longleftrightarrow \Big[t_1 \subseteq t_2 \wedge w_1 \subseteq w_2 \wedge$$

$$\wedge \ w_2 \cap (t_1 \times t_1) = w_1 \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_x \bigwedge_y \Big[(x \in t_1 \wedge y \in t_2 \wedge \langle y,x \rangle \in w_2) \Longrightarrow y \in t_1 \Big] \Big].$$

Es gilt also $\langle t_1,w_1 \rangle \trianglelefteqq \langle t_2,w_2 \rangle$ genau dann, wenn t_1

ein Anfangsstück (bezüglich der Wohlordnung w_2 von t_2) von t_2 ist und die Beschränkung von w_2 auf t_1 mit w_1 identisch ist. Es ist genügend bekannt, daß die Relation *„ist Anfangsstück von"* eine verästelte Ordnung ist. Für $x \in m^*$ ist $]\leftarrow, x]$ sogar wohlgeordnet, denn jedes echte Anfangsstück von $]\leftarrow, x]$ hat die Form $]\leftarrow, y[$ für ein $y \trianglelefteq x$, da $x = \langle t, w \rangle \in m^*$. Wir schreiben $y \triangleleft x$ für $y \trianglelefteq x \wedge y \neq x$. Fügt man noch das Paar $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ zu m^* hinzu, dann ist $\overline{m} = m^* \cup \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}$ ein Baum.

Ist a ein echtes Anfangsstück von $]\leftarrow, x]$ (für $x \in \overline{m}$), so besitzt

$$h(x,a) = \{ y \; ; \; y \in \overline{m} \wedge y \trianglelefteq x \wedge \bigwedge_z (z \in a \rightarrow z \triangleleft y) \}$$

als Teilmenge der wohlgeordneten Menge $]\leftarrow, x]$ ein Minimum

$$k(x,a) = Min_{\trianglelefteq}(h(x,a)) \in \overline{m} .$$

Es gilt also $a =]\leftarrow, k(x,a)[= \{ z \in a \; ; \; z \triangleleft k(x,a) \}$. Für die Garbe von x über a gilt dann:

$$[x]_a = \{ u \; ; \; u \in \overline{m} \wedge k(x,a) \trianglelefteq u \}.$$

Die Garbe $[x]_a$ wird also vom Element $k(x,a)$ *„erzeugt"*: und $k(x,a)$ ist das Minimum aller Elemente aus $[x]_a$. Da wir das Ordnungstheorem nicht vorausgesetzt haben, ist nicht von vornherein klar, ob die Menge aller Garben eine Vollordnung besitzt. Für die Menge k aller Garben $[x]_a$ haben wir in der Menge $\hat{k}$ ein *Repräsentantensystem*. Ausgehend von der Vollordnung r von m können wir zwar <u>nicht</u> das Repräsentantensystem $\hat{k}$

vollordnen, wohl aber die Menge ~~Menge~~ aller *Repräsentanten* $k(x,a)$ mit gemeinsamem a . Dies liefert dann eine Vollordnung $r(a)$ der Menge $g(a)$ aller Garben über a . Dies ist aber hinreichend, um eine Vollordnung $\overline{r}$ von $\overline{m}$ zu definieren.(Bei der Definition von r auf S. 65 hätten wir auch keine Vollordnung $\hat{r}$ von ganz k(= Menge der Garben) benötigt, sondern nur je eine Vollordnung für jede Menge von Garben mit gleichem Anfangsstück).

Sei a ein echtes Anfangsstück von $]\leftarrow,x]$ für $x = \langle t,w\rangle \in \overline{m}$, $x \neq \langle \emptyset,\emptyset\rangle$. Da $k(x,a)$ Minimum von $[x]_a$ ist, gilt: $\neg \bigvee_u [\, u \lhd k(x,a) \wedge \bigwedge_z (\, z \in a \Longrightarrow z \trianglelefteq u)]$, also $]\leftarrow, k(x,a)] \setminus a = \{k(x,a)\}$. Laut Definition von $\trianglelefteq$ ist daher auch die Menge $pr_1(k(x,a)) \setminus \bigcup_{z\in a} pr_1(z)$ einelementig. Wir führen (unter Verwendung des bestimmten Artikels $\boldsymbol{\iota}$) den folgenden Term ein:

$$e = e(x,a) = \boldsymbol{\iota}_d \left(d \in pr_1(k(x,a)) \setminus \bigcup_{z\in a} pr_1(z) \right).$$

Es ist $e \in m$. Da nach Hilfssatz 1, S. 63, für $y \in [x]_a$ $[x]_a = [y]_a$ und daher $k(x,a) = k(y,a)$ gilt, gilt auch: $y \in [x]_a \Longrightarrow e(x,a) = e(y,a)$.

Der bisherige Gebrauch des Symbols $]\leftarrow,x]$ im Beweis von (5.8) bezog sich auf die Ordnung $\trianglelefteq$. Ist $x = \langle t,w\rangle \in \overline{m}$ und $c \in t$, so sei:

$$]\underset{x}{\leftarrow}, c] = \{\, d \,;\, d \in pr_1(x) \wedge \langle d,c\rangle \in pr_2(x) \,\}$$

(der von c erzeugte Hauptanfang von $t = pr_1(x)$ bezüglich der Wohlordnung $w = pr_2(x)$).

Ist a ein echtes Anfangsstück sowohl von $]\leftarrow,x]$

als auch von $]\leftarrow, y]$ $(x, y \in \overline{m})$, so ist im Falle $pr_1(k(x,a)) = pr_1(k(y,a))$ auch $k(x,a) = k(y,a)$, denn es gilt $pr_1(k(x,a)) = \bigcup_{z \in a} pr_1(z) \cup \{e(x,a)\}$ $= pr_1(k(y,a))$ und wegen $z \lhd k(x,a)$ und $z \lhd k(y,a)$ $(z \in a)$ ist (laut Definition von $\trianglelefteq$, S.68) $\bigcup_{z \in a} pr_1(z)$ in der Wohlordnung $pr_2(k(x,a))$ von $pr_1(k(x,a))$ ein Anfangsstück, also: $\bigcup_{z \in a} pr_1(z) =]\leftarrow_{k(x,a)}, e(x,a)[$ und ganz genauso ein Anfangsstück von $pr_1(k(y,a))$ in der Wohlordnung $pr_2(k(y,a))$, also:

$$\bigcup_{z \in a} pr_1(z) =]\leftarrow_{k(y,a)}, e(y,a)[\ .$$

Aber $pr_1(k(x,a)) = pr_1(k(y,a)) \Longrightarrow e(x,a) = e(y,a)$. Das *„neue" Element* $e(x,a) = e(y,a)$ steht also *„hinter"* allen Elementen von $\bigcup_{z \in a} pr_1(z)$, das heißt:

$$pr_2(k(x,a)) = \bigcup_{z \in a} pr_2(z) \cup \left(\bigcup_{z \in a} pr_1(z) \times \{e(x,a)\}\right) \cup$$

$$\cup \{\langle e(x,a), e(x,a)\rangle\} .$$

Die entsprechende Beziehung gilt für $pr_2(k(y,a))$. Daraus folgt: $pr_2(k(x,a)) = pr_2(k(y,a))$. Wir haben also gezeigt:

(5.9) *Ist a ein Anfangsstück sowohl von $]\leftarrow, x]$ als auch von $]\leftarrow, y]$ und gilt $pr_1(k(x,a)) = pr_1(k(y,a))$, so gilt auch $pr_2(k(x,a)) = pr_2(k(y,a))$ und daher: $k(x,a) = k(y,a)$.*

Der Fall, daß zwei Paare $\langle t_1, w_1\rangle$, $\langle t_2, w_2\rangle$ aus $\overline{m}$, welche *„unmittelbar"* über einem gemeinsamen Anfangsstück liegen und welche $t_1 = t_2$ erfüllen, zwei verschiedene Wohlordnungen $w_1 \neq w_2$ haben, ist also unmöglich.

Definition: a ist *vollgeordnetes Anfangsstück in* $\overline{m}$:

$$\mathfrak{A}(a) \rightleftharpoons a \subseteq \overline{m} \wedge \bigwedge_u \bigwedge_v \left[(u \in \overline{m} \wedge v \in a \wedge u \trianglelefteq v) \Longrightarrow u \in a \right] \wedge$$
$$\wedge \mathfrak{Kette}(a, \trianglelefteq \cap (a \times a)) .$$

Für a mit $\mathfrak{A}(a)$ und $y \in \overline{m}$ definiere ferner:

$$a \prec y \iff \bigwedge_u (u \in a \Longrightarrow u \triangleleft y) .$$

Für a mit $\mathfrak{A}(a)$ definiere schließlich:

$$v(a) = \{ \langle k(x,a),\ k(y,a) \rangle \ ;\ a \prec x \wedge a \prec y \wedge$$
$$\wedge \langle e(x,a),\ e(y,a) \rangle \in r \} .$$

(5.10) *$v(a)$ ist eine Vollordnungsrelation der Menge* $k(a) = \{ k(x,a) \ ;\ a \prec x \}$ *für a mit* $\mathfrak{A}(a)$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus (5.9) und der Tatsache, daß r eine Vollordnung von m ist.

Wir können nun für die Menge $\overline{m}$ eine Vollordnung $\overline{r}$ definieren, die die Relation $\trianglelefteq$ erweitert; dabei sei wieder (vergl. S.63): $f(x,y) =]\leftarrow, x] \cap]\leftarrow, y]$ und $x \parallel y \iff \neg (x \trianglelefteq y \vee y \trianglelefteq x)$. Offenbar gilt dann: $x \parallel y \Longrightarrow \mathfrak{A}(f(x,y))$.

$$\overline{r} = \{ \langle x,y \rangle \ ;\ x \trianglelefteq y \vee \left(x \parallel y \wedge \langle k(x, f(x,y)), k(y, f(x,y)) \rangle \right.$$
$$\left. \in v(f(x,y)) \right) \} .$$

Wie auf den Seiten 65-68 zeigt man, daß $\overline{r}$ eine Vollordnung der Menge $\overline{m}$ ist und daß $\overline{r}$ die Teilordnung $\trianglelefteq$ erweitert.

Nun ist $\overline{m}$ bezüglich $\overline{r}$ eine Kette. Nimmt man (*M- Konf*) an, so besitzt $\overline{m}$ in der Ordnung $\overline{r}$ eine

konfinale wohlgeordnete Teilmenge $\overline{t}$:

$$\mathfrak{Wohlord}(\overline{t}\,,\ \overline{r}\cap(\overline{t}\times\overline{t}))\ .$$

Als wohlgeordnete Menge ist $\overline{t}$ mit einer Ordinalzahl λ isomorph. Daher können wir die Elemente von $\overline{t}$ mittels der Ordinalzahlen $\alpha<\lambda$ durchnumerieren:

$$\overline{t} = \{\ \langle t_\alpha\ ,\ w_\alpha\rangle\ \ ;\ \ \alpha<\lambda\ \}.$$

Definiere induktiv: $s_o = t_o$, $s_1 = t_o\cup t_1$, ..., $s_\alpha = \bigcup\{\ t_\beta\ ;\ \beta\leqq\alpha\ \}$ für $\alpha<\lambda$. Definiere ferner:

$$\hat{w}_o = w_o\ ,$$

$$\hat{w}_1 = w_1\cap((t_1\setminus t_o)\times(t_1\setminus t_o))\ ,$$

.....

$$\hat{w}_\alpha = w_\alpha\cap\Big((t_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}t_\beta)\times(t_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}t_\beta)\Big)\quad(\alpha<\lambda)$$

und schließlich noch:

$$v_o = \hat{w}_o = w_o\ ,$$

$$v_1 = v_o\cup(t_o\times(t_1\setminus t_o))\cup\hat{w}_1\ ,$$

.....

$$v_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}v_\beta\cup\Big(\bigcup_{\beta<\alpha}t_\beta\times(t_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}t_\beta)\Big)\cup\hat{w}_\alpha\ ,$$

$(\alpha<\lambda)$. Man bestätigt, daß $\langle s_\alpha\ ,\ v_\alpha\rangle\in\overline{m}$ für alle $\alpha<\lambda$ gilt, d.h. daß $\mathfrak{Wohlord}(\langle s_\alpha\ ,\ v_\alpha\rangle)$ für alle $\alpha<\lambda$ gilt. Ferner haben wir:

$$\beta\leqq\alpha<\lambda\ \Longrightarrow\ \langle s_\beta\ ,\ v_\beta\rangle\trianglelefteqq\langle s_\alpha\ ,\ v_\alpha\rangle$$

Somit gilt auch $\mathfrak{Wohlord}\Big(\bigcup_{\alpha<\lambda}s_\alpha\ ,\ \bigcup_{\alpha<\lambda}v_\alpha\Big)$. Da $\overline{r}$ eine Ordnungserweiterung von $\trianglelefteqq$ ist und $\overline{t}$ konfinal in $\overline{m}$ liegt, gilt:

$$m = \bigcup_{\alpha<\lambda} s_\alpha \ ;$$

$\bigcup_{\alpha<\lambda} v_\alpha$ ist also eine Wohlordnungsrelation von m. Damit ist $\mathfrak{L}^{\circ} \vdash (M\text{-}Konf) \Longrightarrow (M\text{-}Wohl.K.)$ bewiesen.

Die Umkehrung: $(M\text{-}Wohl.K.) \Longrightarrow (M\text{-}Konf)$ kann in $\mathfrak{L}^{\circ}$ leicht bewiesen werden. Ist eine Menge m zusammen mit einer Vollordnung r von m gegeben, so besitzt m nach $(M\text{-}Wohl.K.)$ eine Wohlordnung w. Es ist möglich, durch transfinite Induktion eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge aus m auszusondern, jedoch wollen wir hier einen Ordinalzahl-freien Beweis geben. Eine nichtleere Teilmenge t von m heiße *regulär*, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathfrak{Wohlord}(t,\ r \cap (t \times t)) \wedge Min_{\trianglelefteq}(m) = Min_{\leqq}(t)$,

(ii) $\bigwedge_x [x \in t \Longrightarrow Min_{\trianglelefteq}(\{ y \in m \ ; \ x \leqq y \}) = x]$.

(5.11) *Die Menge g aller regulären Teilmengen von m ist durch die Inklusion vollgeordnet.*

Beweis: Sei $t_1, t_2 \in g$ und u die Union aller a, welche Anfangsstück sowohl von t_1 als auch von t_2 sind. $u \neq \emptyset$, da nach (i) $\{Min_{\trianglelefteq}(m)\}$ Anfangsstück aller $t \in g$ ist. Angenommen $\neg (u = t_1 \vee u = t_2)$; da sowohl t_1 als auch t_2 wohlgeordnet sind, gibt es Elemente $x_1 \in t_1$ und $x_2 \in t_2$, so daß

$$u = \{ y \in t_1 \ ; \ y < x_1 \} = \{ y \in t_2 \ ; \ y < x_2 \}$$

gilt. Nach (ii) gilt jedoch:

$$x_1 = Min_{\trianglelefteq}(\{y \in t_1 \ ; y \geqq x_1\}) = Min_{\trianglelefteq}(\{y \in t_2 ; y \geqq x_2\}) = x_2$$

Widerspruch! $u' = u \cup \{x_1\}$ wäre ein größeres gemein-

sames Anfangsstück, q.e.d.

Aus (5.11) folgt, daß auch $k = \bigcup \{ t ; t \in g \}$ wohlgeordnet ist. Da jedes $t \in g$ Anfangsstück von k ist, ist k offenbar auch regulär. Angenommen, k wäre bezüglich r nicht konfinal in m ; dann wäre $s = \{ z \in m ; \bigwedge_y [y \in k \Rightarrow (\langle y,z \rangle \in r \wedge y \neq z)] \}$ nicht leer und $k' = k \cup \{d\}$ für $d = Min_{\leqq}(s)$ wäre eine größere reguläre Menge, denn es gilt:

$s \supseteq \{y \in m ; d \leqq y\} \Rightarrow d = Min_{\leqq}(s) \leqq Min_{\leqq}(\{y \in m; d \leqq y\})$

und $d \in \{y \in m ; d \leqq y\} \Rightarrow Min_{\leqq}(\{y \in m ; d \leqq y\}) \leqq d$,

also $d = Min_{\leqq}(\{ y \in m ; d \leqq y\})$. k muß also doch in m konfinal sein. Damit ist auch die Umkehrung gezeigt und Satz (5.8) vollständig bewiesen. □

J.D.HALPERN hat in seiner Dissertation [17] gezeigt, daß im System Σ^0 das lokale Auswahlaxiom (AC) nicht aus der Mengenform des Antikettenprinzipes ableitbar ist. Daraus ergibt sich, wie wir nun zeigen wollen, daß auch (*M-Konf*) $\Longrightarrow$(AC) im System Σ^0 kein beweisbarer Satz ist.

(*M- Anti.K.*) Mengenform des Antikettenprinzipes: *„Jede teilgeordnete Menge besitzt maximale Antiketten".*

(*Lok-Anti.K.*) Lokale Form des Antikettenprinzipes: *„Zu jeder Menge* $m = \{\langle m_i, r_i \rangle ; i \in I\}$ *existiert eine Funktion* f *, die jeder Menge* m_i *eine bezüglich* r_i *maximale Antikette von* m_i *zuordnet".*

Dabei heißt eine Teilmenge t einer teilgeordneten

Menge $\langle m, \leqq \rangle$ eine *Antikette*, wenn für alle $x, y \in t$ aus $x \neq y$ folgt $\neg (x \leqq y \vee y \leqq x)$.

(5.12) Lemma: *Im System* Σ^0 *ist die Mengenform des Antikettenprinzipes mit der lokalen Form äquivalent:* $\Sigma^0 \vdash (M\text{-}Anti.K.) \Longleftrightarrow (Lok\text{-}Anti.K.)$.

Wir müssen $(M\text{-}Anti.K.) \Longrightarrow (Lok\text{-}Anti.K.)$ beweisen. Sei dazu $m = \{ \langle m_i , r_i \rangle ; i \in I \}$ eine Menge teilgeordneter Mengen m_i mit den Ordnungsrelationen $r_i \subseteq m_i \times m_i$. Nach ZERMELO [48] ist der Satz:

$$\bigwedge_x \bigvee_y [\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \wedge x \cap y = \emptyset]$$

ohne Fundierungsaxiom (also in Σ^0) beweisbar - in der Literatur (z.B. HENKIN-SMITH-VARINEAU-WALSH [50], S.136) wird er meist unter Verwendung von (D) bewiesen -, denn für $u = \{ z ; z \in \bigcup(\bigcup x) \wedge z \notin z \}$ ist $y = \{u\} \times x$ mit x elementenfremd und $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$ (Gleichheit der Kardinalzahlen). Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Mengen m_i paarweise disjunkt sind (wären sie es nicht, so gäbe es zu m eine Menge y und eine eineindeutige surjektive Abbildung f von m auf y und die Mengen $\{f(m_i)\} \times m_i$ wären paarweise disjunkt). $\bigcup \{ m_i ; i \in I \}$ ist zusammen mit der Relation $\bigcup \{ r_i ; i \in I \}$ eine teilgeordnete Menge, die nach $(M\text{-}Anti.K.)$ eine maximale Antikette a besitzt; dann sind aber die Mengen $a_i = a \cap m_i$ maximale Antiketten der Mengen m_i, *q.e.d.*

Sei m eine Menge und r eine Vollordnung von

m . $\{ \langle t, (t \times t) \cap r \rangle ; \emptyset \neq t \subseteq m \}$ ist eine Menge von Ketten. Nimmt man (*Lok-Anti.K.*) an, so existiert eine Funktion f , die jeder nichtleeren Teilmenge t von m eine (bezüglich $r \cap (t \times t)$) maximale Antikette $f(t)$ zuordnet. Da t aber eine Kette ist, sind maximale Antiketten von t aber notwendig einelementig. Also ist f eine Auswahlfunktion. Wie zuerst ZERMELO in [46] und [47] gezeigt hat, kann m wohlgeordnet werden. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

(5.13) Satz: *Die Mengenform des Antikettenprinzipes impliziert im System* Σ^0 *die Mengenform des Wohlordnungssatzes für Ketten:*

$\Sigma^0 \vdash$ (*M- Anti.K.*) $\Longrightarrow$ (*M- Wohl.K.*).

Da nach HALPERN [17] (*M-Anti.K.*) $\Longrightarrow$(AC) in Σ^0 nicht beweisbar ist, ist nach (5.8) und (5.13) auch : (*M- Konf*) $\Longrightarrow$(AC) in Σ^0 nicht beweisbar. In Σ ist (*M- Wohl.K.*) $\Longleftrightarrow$(AC) beweisbar (vergl. H.RUBIN [38]). Daher erhalten wir:

(5.14) Satz: *In der NBG-Mengenlehre* Σ^0 *ohne Fundierungsaxiom ist das lokale Auswahlaxiom* (AC) *vom Konfinalitätsprinzip (M-Konf) unabhängig; in der NBG-Mengenlehre* Σ *mit Fundierungsaxiom ist* (AC) *mit (M-Konf) äquivalent.*

(5.15) Satz: *In der NBG-Mengenlehre* Σ *ist das lokale Auswahlaxiom* (AC) *mit dem Antikettenprinzip (M-Anti.K.) äquivalent.*

Mit Satz (5.15) haben wir eine Frage beantwortet, die G.KUREPA in [24] gestellt hatte.

Ist für eine Aussage Φ aus $\mathfrak{L}'$: $\Sigma^0 \vdash (AC) \Rightarrow \Rightarrow \Phi \Rightarrow (M\text{- }Wohl.K.)$ beweisbar, so folgt wegen $\Sigma \vdash (AC) \Leftrightarrow (M\text{-}Wohl.K.)$ sofort: $\Sigma \vdash \Phi \Leftrightarrow (AC)$. Auf diese Art kann man die folgenden beiden Sätze beweisen:

(5.16) Satz: *In Σ ist die Aussage: „Jede Gruppe besitzt maximale abelsche Untergruppen" mit dem lokalen Auswahlaxiom* (AC) *äquivalent.*

(5.17) Satz: *In Σ ist die Aussage: „Kartesische Produkte gerichteter Mengen sind gerichtete Mengen" mit dem lokalen Auswahlaxiom* (AC) *äquivalent.*

Sei (AC_2) das Auswahlaxiom für Mengen von ungeordneten Paaren ($\mathbf{C}_2$ in LÉVYs Notation [27]) und $(M.A.U.)$ die Aussage, daß jede Gruppe *m*aximale *a*belsche *U*ntergruppen besitzt. G.KLIMOVSKY hat in [51] gezeigt, daß $(AC_2) \wedge (M.A.U.)$ im System Σ^0 mit (AC) äquivalent ist. Um $(M.A.U.) \Rightarrow (M\text{-}Wohl.K.)$ in Σ^0 zu beweisen, sei $\langle m, \leqq \rangle$ eine Kette. Eine Auswahlfunktion f , die auf der Potenzmenge $\mathcal{P}^{\#}(m) = \mathcal{P}(m) \setminus \{\emptyset\}$ definiert ist, zu finden, bilden wir wie bei KLIMOVSKY das schwache direkte Produkt der freien Gruppen $F(t)$ für $t \in \mathcal{P}^{\#}(m)$. Für die Menge der u_x $(x \in \mathcal{P}^{\#}(m))$ (siehe KLIMOVSKY [51], S.284) können wir eine Auswahlfunktion definieren, da $u_x \subseteq x$ für alle $x \in \mathcal{P}^{\#}(m)$, x als Teilmenge der voll-

geordneten Menge m selbst vollgeordnet ist und jedes u_x ein- oder zweielementig ist. (AC_2) wird also nicht benötigt; der übrige Beweis verläuft wie bei KLIMOVSKY [51].

Um (*M-Wohl.K.*) aus dem Satz (Π. *g.M.*) = *Kartesische Produkte gerichteter Mengen sind gerichtet"* (in Σ^0) abzuleiten, verfahren wir wie folgt: $\langle m, \leqq \rangle$ sei eine vollgeordnete Menge und $r = \{ \langle a,b \rangle ; a,b \in m \wedge a \leqq b \}$ der Graph der Relation $\leqq$. Für jede nichtleere Teilmenge t von m ist dann $t \cup \{x,y\}$ zusammen mit der Ordnungsrelation

$$v(t,x,y) = \big(r \cap (t \times t)\big) \cup \big(\{x,y\} \times t\big) \cup \{\langle x,x \rangle, \langle y,y \rangle\}$$

eine (nach oben) gerichtete Menge. Da nach (Π. *g.M.*) auch das kartesische Produkt:

$$\prod_{\emptyset \neq t \subseteq m} (t \cup \{x,y\}) = \{ f : \mathcal{P}^{\#}(m) \longrightarrow \bigcup_{\emptyset \neq t \subseteq m} (t \cup \{x,y\}) \; ; \; f`t \in t \cup \{x,y\} \}$$

eine (nach oben) gerichtete Menge ist, besitzen die beiden Elemente $f_x = \{ \langle x,t \rangle \; ; \emptyset \neq t \subseteq m \}$ und $f_y = \{ \langle y,t \rangle \; ; \emptyset \neq t \subseteq m \}$ des Produktes eine obere Schranke f_o. f_o ist eine Funktion, die jedem t mit $\emptyset \neq t \subseteq m$ ein Element von t zuordnet, also eine auf der Potenzmenge $\mathcal{P}^{\#}(m) = \mathcal{P}(m) \setminus \{\emptyset\}$ definierte Auswahlfunktion. Also besitzt m eine Wohlordnung, q.e.d.

L I T E R A T U R

[1] W.ACKERMANN: *Zur Axiomatik der Mengenlehre*; Math. Annalen 131 (1956) S. 336-345.

[2] P.BERNAYS: *A system of axiomatic set theory*; (in 7 Teilen, alle Journal of Symbolic Logic) Part I: vol.2(1937)65-77; Part II: vol.6(1941)1-17; Part III: vol.7(1942)65-89; Part IV: vol.7(1942)133-145; Part V: vol.8(1943)89-106; Part VI: vol.13 (1948)65-79; Part VII: vol.19(1954)81-96.

[3] P.BERNAYS:*Axiomatic set theory;* In: P.BERNAYS-A.A.FRAENKEL: Axiomatic set theory (Studies in Logic), Amsterdam 1958.

[4] P.J.COHEN: *The independence of the continuum hypothesis* (2 Teile, beide Proc.Nat.Acad.Sci.USA), Teil I: vol.50 (1963) S.1143-1148; Teil II: vol. 51 (1964) S.105-110.

[5] P.J.COHEN: *Independence results in set theory;* in: The theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symp.at Berkeley; Amsterdam 1965, S.39-54.

[6] P.J.COHEN: *Set theory and the continuum hypothesis;* New York - Amsterdam 1966.

[7] V.DEVIDÉ: *A proof of the well-ordering theorem;* Colloquium Math., vol.11 (1963) S.53-54.

[8] V.DEVIDÉ: *On monotonous mappings of complete lattices;* Fundamenta Math. 53 (1964) S.147-154.

[9] V.DEVIDÉ: *Application of a lattice-theorem to abstract set theory;* Jugoslavenska Akademija Znanosti I Umjetnosti, Zagreb 1964, S.67-74, "Rad",vol.331.

[10] W.B.EASTON: *Powers of regular cardinals;* Dissertation, Princeton-University, 1964.

[11] S.FEFERMAN: *Some applications of the notions of forcing and generic sets;* Fundamenta Math. 56 (1965) S.325-345.

[12] U.FELGNER: *Untersuchungen über das Zornsche Lemma;* Compositio Math., vol.18 (1967) S.170-180.

[13] K.GÖDEL: *The consistency of the continuum hypothesis;* Annals of Math.Studies, Nr.3, Princeton 1940.

[14] P.HÁJEK: *Syntactic Models of Axiomatic Theories;* Bull.Acad.Polon.Sci.,vol.13 (1965) S.273-278.

[15] P.HÁJEK: *Generalized Interpretability in Terms of Models;(Note to a paper of R.Montague).* Časopis pro pěstování matematiky, vol.91(1966)S.352-357.

[16] P.HÁJEK: *Sets, semisets, models;* vervielfältigt, Prag 1968.

[17] J.D.HALPERN: *Dissertation;* University of California, Berkeley, 1962.

[18] J.D.HALPERN: *The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem;* Fundamenta Math.,vol.55 (1964) S.57-66.

[19] J.D.HALPERN-H.LÄUCHLI: *A partition theorem;* Transactions Amer.Math.Soc.,vol.124(1966)S.360-367.

[20] K.HAUSCHILD: *Bemerkungen, das Fundierungsaxiom betreffend;* Zeitschr.f.math.Logik u.Grundlagen d. Math., vol.12 (1966) S.51-56.

[21] L.HENKIN: (Abstract), Bull.Amer.Math.Soc.,vol.60 (1954) S.387-388.

[22] L.HENKIN: *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic;* Trans.Amer.Math.Soc., vol.74(1953), S.410-427.

[23] H.HERMES: *Einführung in die mathematische Logik;* Stuttgart 1963.

[24] G.KUREPA: *Über das Auswahlaxiom;* Math.Annalen 126 (1953) S.381-384.

[25] A.LÉVY:*On Ackermann's set theory;* Journal of Symbolic logic, vol.24(1959)S.154-166.

[26] A.LÉVY: *Comparing the axioms of local and universal choice;* In: „Essays on the Foundations of Math.", Jerusalem 1961, S.83-90.

[27] A.LÉVY: *The Fraenkel-Mostowski method for independence proofs in set theory;* In: „The Theory of Models",Proc.of the 1963 internat.Symp.at Berkeley; (Studies in Logic), Amsterdam 1965, S.221-228.

[28] E.MENDELSON: *Introduction to Mathematical Logic;* Princeton, New Jersey 1964.

[29] A.MOSTOWSKI: *Cohen's independence proof and second order formalisation;* In: „Problems in the Philosophy of Math.",Herausgeber: I.Lakatos, (Studies in Logic), Amsterdam 1967, S.113.

[30] J.v.NEUMANN: *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre;* Journal f.d.reineu.angew.Math.(Crelle), vol.154 (1925) S.219-240.

[31] J.v.NEUMANN: *Die Axiomatisierung der Mengenlehre;* Math.Zeitschrift, vol.27 (1928) S.669-752.

[32] J.v.NEUMANN: *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre;* Journal f.d.reine u.angew.Math.(Crelle) vol.160(1929)S.227-241.

[33] I.L.NOVAK: *A construction for models of consistent systems;* Fundamenta Math.,vol.37 (1950) S.87-110.

[34] W.v.O.QUINE: *Set theory and its logic;* Cambridge Massachusetts 1963 (Harvard University press).

[35] H.RASIOWA- R.SIKORSKI: *The Mathematics of Metamathematics;* Warschau 1963.

[36] R.M.ROBINSON: *The Theory of classes, a modification of v.Neumann's system;* Journal of Symbolic Logic, vol. 12 (1937) S.69-72.

[37] H.RUBIN- J.E.RUBIN: *Equivalents of the Axiom of choice;* (Studies in Logic), Amsterdam 1963.

[38] H.RUBIN: *Two propositions equivalent to the axiom of choice only under both the axioms of extensionality and regularity;*Notices AMS,vol.7(1960)381.

[39] J.SCHMIDT: *Konfinalität;* Zeitschr.f.math.Logik u.Grundlagen d.Math., vol.1(1955) S.271-303.ä

[40] J.C.SHEPERDSON: *Inner models of set theory;*(in drei Teilen, alle Journal of Symbolic Logic), part I: vol.16(1951)S.161-190; part II: vol.17 (1952)S.225-237; part III: vol.18(1953)S.145-167.

[41] A.TARSKI- A.MOSTOWSKI- R.M.ROBINSON: *Undecidable theories;* (Studies in Logic),Amsterdam 1953.

[42] P.VOPĚNKA: *The independence of the continuum hypothesis;*Amer.Math.Soc.Translations, vol.57, Series 2, Providence, Rhode Island 1966,S.85-112. (Übersetzung der in russ.Sprache erschienen Arbeit in den Comment.Math.Univ.Carolinae,Prag, vol.5 (1964),suppl.1).

[43] P.VOPĚNKA: ∇ - *Models in which the generalized continuum hypothesis does not hold;* Bull.Acad.Polon. Sci., vol.14 (1966) S.95-99.

[44] P.VOPĚNKA- P.HÁJEK: *Über die Gültigkeit des Fundierungsaxioms in speziellen Systemen der Mengenlehre;* Zeitschr.f.math.Logik u.Gr.d.Math. vol.9 (1963) S.235-241.

[45] Hao WANG: *Arithmetic translations of axiom systems;* Trans.Amer.Math.Soc., vol.71(1951) S.283-293.

[46] E.ZERMELO: *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann;* Math.Annalen vol.59(1904)S.514-516.

[47] E.ZERMELO: *Neuer Beweis für die Wohlordnung;* Math. Annalen vol.65 (1908) S.107-128.

[48] E.ZERMELO: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre,I.* Math.Annalen vol.65(1908)261-281.

[49] A.R.D.MATHIAS: *On the order-extension principle;* Notices A.M.S.vol.14(1967),Nr.3, S.410.

[50] HENKIN-SMITH-VARINEAU-WALSH: *Retracing elementary mathematics.* New York 1962.

[51] G.KLIMOVSKY: *El axioma de elección y lc existencia de subgrupos conmutativos maximales.*Revista Un. Mat.Argentina, vol.20 (1960/62) S.267-287.

L e b e n s l a u f

Ich, Ulrich Felgner, wurde als Sohn des Professors Kurt Felgner und seiner Ehefrau Maria, geb. Brüsselbach, am 17.November 1941 in Leoben in der Steiermark geboren. Nach vier Grundschuljahren in Osnabrück besuchte ich von Ostern 1952 an das Ratsgymnasium Osnabrück, die Schiller-Schule Hannover und das Gymnasium Philippinum in Weilburg (Lahn), wo ich im Februar 1962 das Abitur bestand.

Vom Sommer-Semester 1962 bis zum Sommer-Semester 1964 studierte ich an der J.Liebig-Universität Gießen die Fächer Mathematik und Physik und legte dort am 8.Juni 1964 die Vordiplomprüfung in Mathematik ab. Anfang September erhielt ich dann von der französischen Regierung ein Stipendium, um zwei Semester an einer französischen Universität studieren zu können. Ich wählte Besançon; dort bestand ich im Juni 1965 das Certificat d'études supérieures d'Algèbre. Vom Winter-Semester 1965/66 an studierte ich an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main, wo ich am 7.Juni 1967 die Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik bestand. Seit Obktober 1966 war ich als Wissenschaftliche Hilfskraft am Math. Seminar in Frankfurt am Lehrstuhl Prof. Dr.R.Baer tätig, und ab Oktober 1967 wurde ich mit der Verwaltung einer Wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen unter Prof.Dr.H.Salzmann betraut.

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren: J.André, R.Baer, E.A.Behrens, H.Boerner, R.Croisot, D.Gaier, G.Köthe. K.Maruhn, J.L.Motchane, G.Pickert und H.Salzmann.

Allen diesen Herren gilt mein Dank. Insbesondere fühle ich mich aber Herrn Salzmann für die vielseitigen Anregungen, die er mir während meiner Frankfurter und Tübinger Studienzeit zu teil werden ließ, verpflichtet; für sein stets förderndes Interesse spreche ich ihm meinen Dank aus.

Druckbüro Frau Elly HUTH, 74 Tübingen